序章「数は比」

これが基本なのですが、
初めにこれを読み切るのは
もしかしたら難儀するかもわかりません。

出来れば、初めにこの章を流し読みのあと、各学年へ進み、
時々、序章へ戻ってくださるのも良いかと思います。

各学年に分けて述べようかとも思ったのですが、
流れが悪くて読み取りにくくなるのは
どちらでも起こることと考えて
一応の流れを表現することとしました。
各章でも同じことを繰り返し述べている部分もあり、
わずらわしい、と思われる方もあるかと思いますが
ごしんぼうくださいな。

序章目次

たは問題があるので、網掛けしています。

提案　数の再発見　あ　個数を数えて等倍・等分へ

ちょっと刺激的ですがハッキリ言うと、
現代数学は

数は比と言いながら、
自然数の定義が
比になっていません。
たのペアノの公理を参照してください。

似たようなことですが、

乗除は加減に先立つ
と言いながら、
自然数の定義が
加法優先です。

おかしい！ですね。

分配法則の導入では
$ab+ac=a(b+c)$ を
「ねっ！そうなるでしょ」
って感じで使わせている。

次に提案する考えに基づけば
これらの課題を解決することができる
と思うのですが如何でしょうか。

次は目次です。目次ですからわかりにくいものです。次に読み進んでください。

ステップ ア　順

等倍*の概念

1、　2、　3　とは
１倍、2倍、3倍のことである。

**1倍のことを「等倍」ということがあります。ここでは「等分の逆」としての「等倍」です。

ステップ イ　逆向き

等倍の逆の概念

等分

ステップ ウ　順・逆の混合

等倍・等分の混合

ステップ エ　順・逆の複合

等分・等倍の複合

その表記法の変化としての

分数・小数・割合

*

ステップ ア　順：**等倍**の概念へ

次の○を、「１、２」と数えてください。

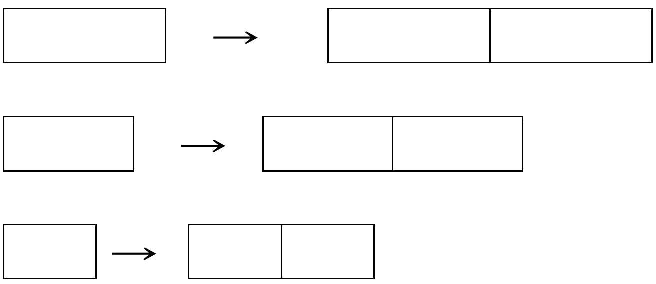
○→○○

○→○○

○→○○

○→○○

次の□を、「１、２」と数えてください。



同じように**個数**を数えていますが、
多種多様な同じ形・同じ大きさを
１、２と繰り返し数えるうちに、

上の全ての ⟶ に
共通する意味は、
２倍の概念であることに気づきます。

同様にして
３倍、４倍………の概念が生まれます。
これらの**倍概念**を
自然数の性質の**根本**として取り上げると
算数教育として筋がとおります。

分配法則の元

●●●＋●●＝●●●●●　をふつう

3+2＝ 5

と表すわけですが、
等倍感覚を基準にして考えると、
●●●は ●×3
●●　は ●×2

よって、

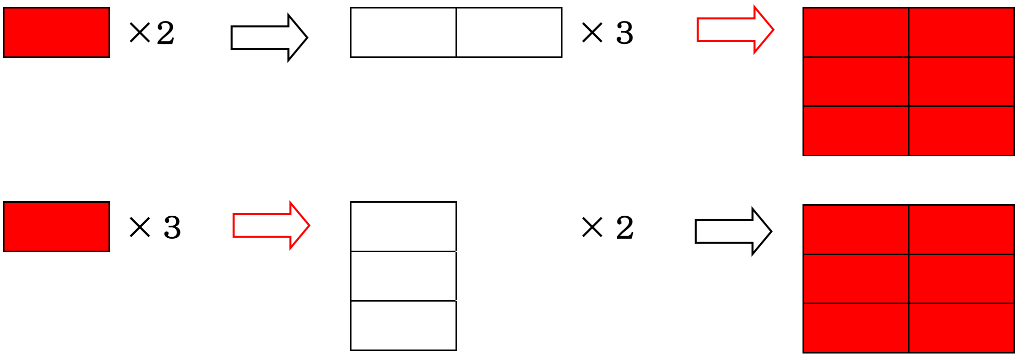
●●●＋●●
＝●×3＋●×2
＝●×(3＋2)
＝●　×　5

分配法則の元は、
個数を数える時に既に在る
と考えられます。

この時、うれしいことに

個数の順序、
個数の加減、
個数の乗除と**矛盾を起こしません。**

【**等倍**の**順序**は**交換可能**である】ことを調べてみよう。



上記の図から明らかなように、

２倍してから３倍しても、３倍してから２倍しても、

結果は同じです。

数式で表せば、$\boxed{\times 2 \quad \times 3}$ は $\boxed{\times 3 \quad \times 2}$ と計算出来ます。

これを、$\boxed{\text{等倍の順序交換可能の法則}}$ と呼ぶことにしましょう。

付け足し

加減は、ソロバンで
「御破算で願いましては」と
言うように、
はじめの数の前にゼロがあります。
例えば、

3+2 は

0 +3 +2 のことです。

少し違いますが、同じように、
乗除

$\boxed{3\times 2}$ は、

３の前に×があり、

$\boxed{\times 3 \quad \times 2}$

さらに、または

1 $\boxed{\times 3 \quad \times 2}$、または

■ $\boxed{\times 3 \quad \times 2}$ のことです。

自然数は

掛け算で出来ない数と

掛け算で出来る数に

分けることが出来ます。

1、2、3、5、7 は
自然数の掛け算ではできません。

一方、4、6、8 などは
4＝2×2
6＝2×3
8＝2×2×2　のように、
掛け算で出来ない数を使って
掛けてつくることが出来ます。

それゆえ

5 ＋ 6　とは
＝5 ＋ 2×3 のことです。

つまり、
6のように、
掛け算で出来た数というものは
一つの数のように見えていますが
実は、
掛け算で出来ない数を掛け合わせて
作った数だということです。
逆に言うと、
掛け算は、
一つの数を分解して見せた数
ということになります。

こう考えると、
掛け算は、足し算より先に計算する約束が
数の基本のところにあるのだと
感じることが出来ます。

難しい説明がなくとも
小学生も納得します。

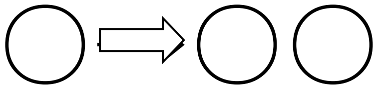
次の自然数を
掛け算で出来ない数Aと、
掛け算で出来る数に分け、
掛け算で出来る数は分解してみましょう。

1を掛け算で出来ない数の中に入れると
3＝1×3 のように、
どの数も掛け算で出来る数になるので
除くことにします。

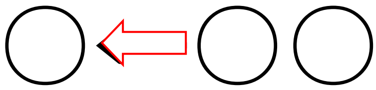
	A	掛け算で出来る数
2	2	
3	3	
4		2×2
5	5	
6		2×3
7	7	
8		2×2×2
9		3×3
10		2×5
11	11	
12		2×2×3
13	13	
14		2×7
15		3×5
16		2×2×2×2

ステップ イ ： **等分**の概念へ

古代に既に、



この２**等倍**に対して、

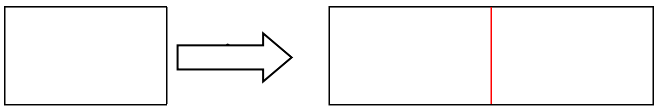


逆の概念

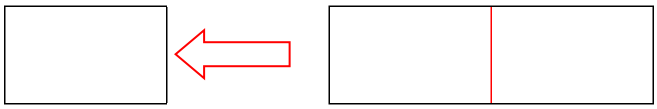
２等分が

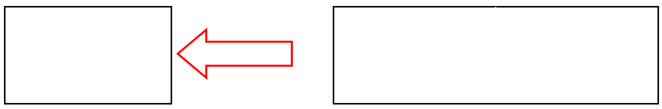
考えられ始めていたでしょう。

○でなく、レンガ状のもので考えてみよう。



上記の**逆**としての

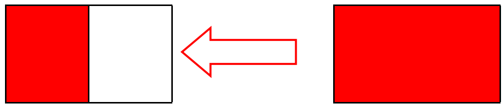




初めは、
２倍した物を２等分することからの

÷２ であったでしょうが、

進んで、



初めの１個を２等分する÷２に
進むでしょう。

このような形で、
２等分の概念が出来ていくことは
非常に**自然**です。

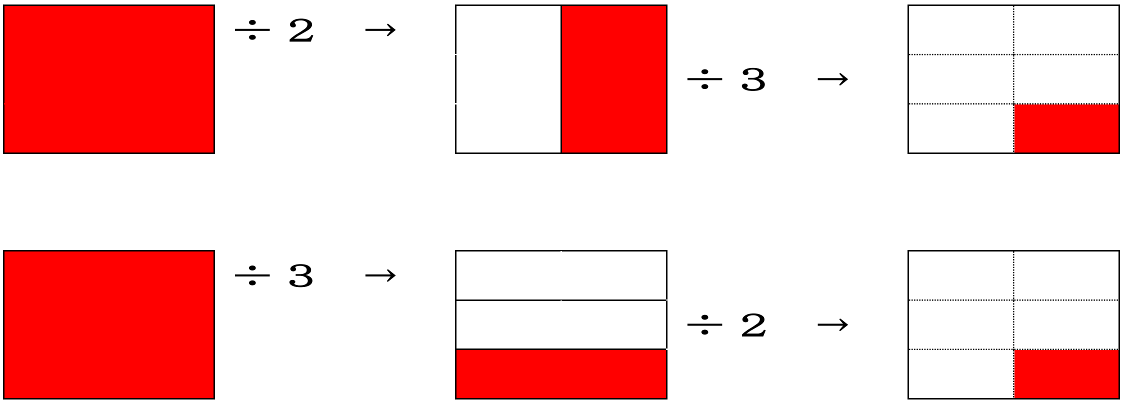
このようにして、
今から 5000 年も前の古代エジプトに
分数が使用されていたと推測しても
大過ないと思います。

エジプトの分数表記

$\bar{2}$は、$\frac{1}{2}$だけでなく、

$\boxed{\div 2}$でもあったかも知れない、
と考えると面白いと思うのですが。

【等分の順序は交換可能である】ことを調べてみよう。



上記の図から明らかなように、$\boxed{\div 2 \quad \div 3}$ は $\boxed{\div 3 \quad \div 2}$ と計算出来ます。

これを、**等分の順序交換可能の法則**と呼ぶことにしましょう。

×6 の 6 は
6＝2×3 ですから、

$$\times 6$$
$$= \times(2\times 3)$$
$$= \times(3\times 2)$$

ですから、
２倍してから３倍しようが、
３倍してから２倍しようが
掛け算の順序というのは
６の内部の問題に過ぎない
と考えられます。

同じように、
÷6 の 6 は、
さきに考えたように、
6＝2×3 ですから

$$\div 6$$
$$= \div(2\times 3)$$
$$= \div(3\times 2)$$

ですから、
２で割ってから３で割ろうが
３で割ってから２で割ろうが
割り算の順序というのは
６の内部の問題に過ぎない
と考えられます。

ステップウ：【等倍・等分の混合】

小学校の算数で、

掛け算は**交換できる**が
6×2＝2×6、
割り算は**交換できない**
6÷2≠2÷6

と**理解**されています。

それは、御承知の通り

記号×の**前後の数字**を
入れ替えて計算してもよいが、
記号÷の前後の数字を
入れ替えては計算できない

と言っているのです。しかし、

記号÷は、

÷の前後の数を結びつけるのではなく、
後ろの数と結び付いている
と考えてみましょう。

6÷2

の６の前に記号はありませんが、
これは、前に記号がなくとも、
数は倍数であるという基本にのっとって
×6 を表していると考えると、

6 ÷2
＝×6 ÷2
＝ ÷2 ×6

が可能になります。

例えば、

4 ×6 ÷2 ＝ 12

4 ÷2 ×6 ＝ 12

÷2 は、×6 の前に持ってこれます。
6÷2≠2÷6 よりも
こちらの方が大切な考えです。

ついでながら、
数学は、
「かけて１になる２つの数を
互いに**逆数**」
と定義します。ですから

$\frac{2}{3}$ の**逆数**は $\frac{3}{2}$ です。

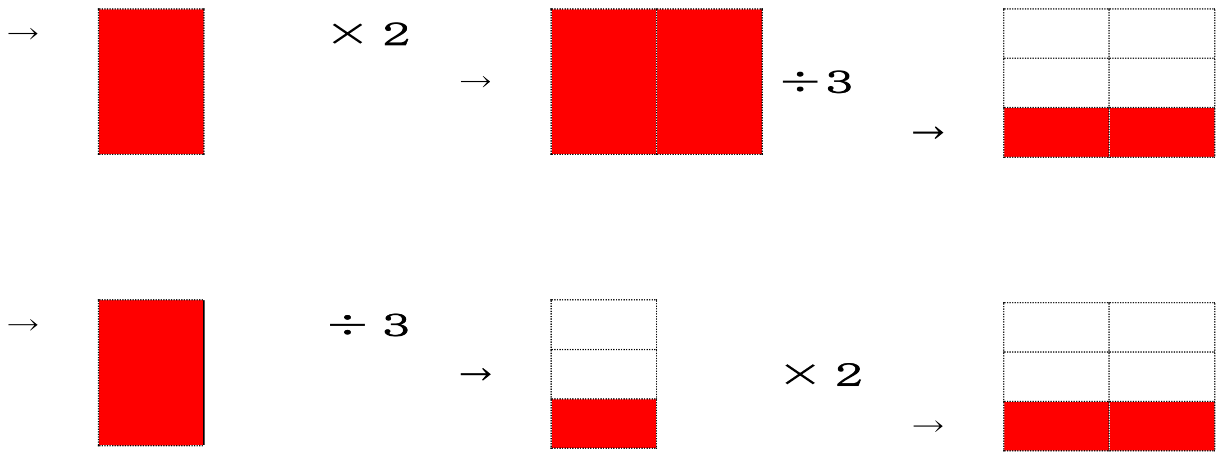
しかし、元は、昔は、初めは
×2 の逆数は ÷2
÷3 の逆数は ×3
だったのではないでしょうか。
×2÷2=1
÷3×3=1
すると、
×2÷3 の逆数は
÷2×3
だったのではないでしょうか。

【等倍・等分の順序も交換可能である】

次の分数乗除に進む前に、

等分・等倍の
演算順序交換の法則

などについて調べておきましょう。



上記の図から明らかなように、$\boxed{\times 2 \div 3}$は

$\boxed{\div 3 \times 2}$と計算出来ます。

これを、

等倍・等分の順序交換可能の法則

と呼ぶことにしよう。

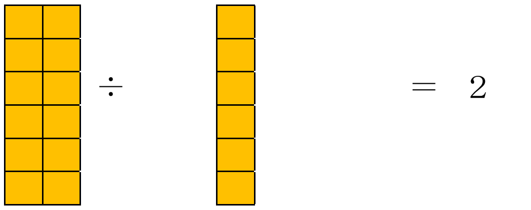
「割り算」を含めて順序交換可能であることを理解していない児童・生徒は
非常に多いのです。

「**乗法**の交換法則」を「掛け算の交換法則」と考えてしまっているのです。

この「**乗法**」は、本来「除法」を含んでいるのに、です。

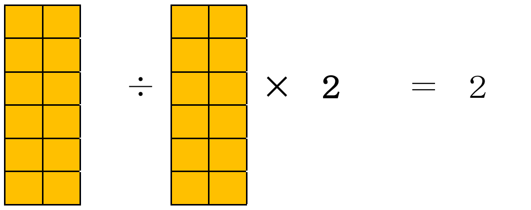
ステップ エ ー①

結合の法則

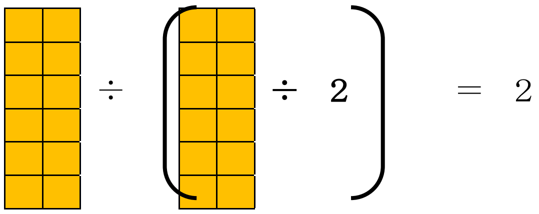


左の計算を数式に表すと

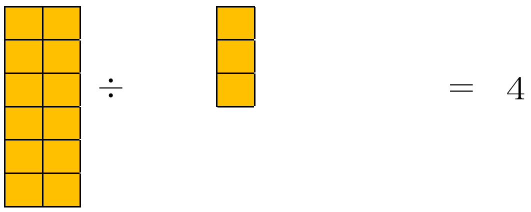
$$12 \div 6 = 2$$



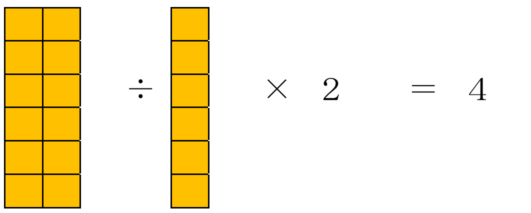
$$12 \div 12 \times 2 = 2$$



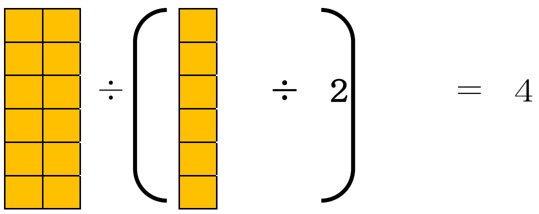
$$12 \div (12 \div 2) = 2$$



$$12 \div 3 = 4$$



$$12 \div 6 \times 2 = 4$$



$$12 \div (6 \div 2) = 4$$

割る大きさを２分の１にすると、商は２倍になる。

ステップエ－②　：分数乗除へのステップ

分数の乗除は
自然数乗除の**表記法の違い**だけの問題であると考えましょう。

×2÷6 と ÷6×2 とは順序を入れ替えただけの同じ式です。
先に見たように、掛け算と割り算との順を入れ替えただけの式です。

これを分数で表すと、

×2÷6　＝　÷6×2		
＝×(2÷6) 2÷6 を英語風に表すと ＝×2/6 2/6 を数学で表すと $=\times\dfrac{2}{6}$	18 頁で見たように ÷(6÷2) 6÷2 を英語風に表すと ＝÷(6/2) 6/2 を数学で表すと $=\div\left(\dfrac{6}{2}\right)$	÷6×2＝×2÷6 左の２つの式から 明らかなように、 $\div\left(\dfrac{6}{2}\right)=\times\dfrac{2}{6}$ ＊分数で割る計算が、 逆数を掛ける計算に なっています。

つまり、分数は本来、自然数の乗除の複合を表すと考えれば、

自然数の乗除の法則が判れば

それ以上のことは何もないのだとわかります。

このようにして、

自然数から**分数に至る道**

は**非常に単純明快**なものとなりました。

分数は元々、

等倍・等分の

複合表記法の一つ

として捉えれば簡単です、

分数が

整数乗除を表しながら、

大きさ

も示すことが出来るのは、

自然数が

等倍を表しながら、

大きさを表せるのと同じ

であると考えると

数全体の流れが自然です。

古代ギリシア風の

自然数を、

個数とだけ見る(基数主義)ことをやめ、

「**倍数**と見る方法を基本に採用すれば、

（たぶん、古代エジプトやメソポタミアも

そう見ていたと思う）

私たちの算数教育は

ずいぶん**楽になる**と思います。」

どこかで

「数学はいつもどこかで**飛躍がある**」

と読んだことがあり、

うまく前と後の論理が繋がらないとき、

「これが飛躍か」と、私も

無理に納得させていました。

しかし、

「分からないからの飛躍」は、

「昔の誤りを引きずっている」、或いは

「略式で見えなくなっている」

と考えれば、

新しい、より望ましい論理を

導き出せるように思うのです。

自然数と**分数**の**論理**を

連続・一体化させる作業は

算数教育にとって

最も大切な課題だと思います。