この本では、何故
５年の単元より
６年の単元を
先に置くのか。

これは、重大問題です。
五年生単元の割合は
六年生単元の比を基にして考えた方がずっと
筋道立っています。

たぶん、明治期、
比に不慣れだったので
得意な割合（歩合計算）を先にし、
比を後にしたのでしょう。

そろそろ考え直しませんか、
との提案です。
以下に説明します。
五年生単元と一緒に読んでください。

６年生の比の導入

1本5円ならば、 2本は何円？

２年生で学んだ表の「⇒」を

１本	⇒	２本
５円	⇒	

「：」に換えれば

１本	：	２本
５円	：	

ほぼ比の式になります。

あとは、
「上の式も下の式も
右の数値が左の数値の
２倍になることが同じなので、
等号でむすぶことにする」
とすれば済みます。

１本５円ならば、２本は何円？ １本：２本＝５円：５円×2

となります。

以下同様に、

１本５円ならば、３本は 15 円。 １本：３本＝5 円：５円×3

１本ａ円ならば、ｍ本はａm円。 １本：ｍ本＝a 円：a×ｍ円

いくつか類例を見せれば、
子どもは簡単に理解します。
６年生まで待つ必要はありませんね。

２本 10 円ならば、
１本は何円？

３年生で学ぶ、下の表の「⇒」

２本	⇒	１本
10 円	⇒	(10÷２円)

を「：」に換えれば

２本	：	１本
10 円	：	(10÷２円)

ほぼ比の式になります。

あとは、
「上の式も下の式も
右の数値が左の数値の
２分の１になることが同じなので、
等号でむすぶことにする」
とすれば済みます。

２本 10 円ならば、１本は何円？
２本：１本＝10 円：10 円÷2

以下同様に

３本 15 円ならば、１本は５円。
３本：１本＝15 円：15 円÷3

ｎ本ａｎ円ならば、１本はａ円。
ｎ本：１本＝an 円：ａｎ÷ｎ円

ｎ本Ａ円ならば、１本はＡ÷ｎ円。
ｎ本：１本＝Ａ円：Ａ÷ｎ円

２：１、１：３のような

２つの式を**組み合わせ**れば

	２本	：１本	：３本
＝	10 円	：５円	：15 円

このあとに、

２本:３本＝10 円:(　　　)

という問題にすれば
こどもは「間に１本をはさんで」考えます。

このとき、２本と３本の間を
「÷２×３」ではなくて、

「$\times\frac{3}{2}$」とか

「$\div\frac{2}{3}$」と考えさせたいときは、

÷2　　×3

「÷2 と×3 の順は入れ替えられる」ので

＝　　×3　　÷2

「÷2 は、英語では/2 と表現する」ので

＝　　×3　　/2

「×3/2 は算数表記すると」

＝　　$\times\frac{3}{2}$

のように、
分数乗除は
整数乗除の表記方法が換わっただけ
と導けば特に問題はありません。

一般に

$$\mathrm{m} : \mathrm{n} = \mathrm{A} : (\mathrm{A} \div \mathrm{m} \times \mathrm{n})$$

の問題も、間に１をはさんで考えます。

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \mathrm{m} & : & 1 & : & \mathrm{n} \\ = \mathrm{A} & : & \mathrm{A} \div \mathrm{m} & : & \mathrm{A} \div \mathrm{m} \times \mathrm{n} \end{array}}$$

と、別に大して難しい問題ではありません。
さらに、

$\mathrm{A} \div \mathrm{m} \times \mathrm{n}$
$= \mathrm{A} \times \mathrm{n} \div \mathrm{m}$
$= \mathrm{A} \times \mathrm{n}/\mathrm{m}$
$= \mathrm{A} \times \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$

または、

$\mathrm{A} \div \mathrm{m} \times \mathrm{n}$
$= \mathrm{A} \div (\mathrm{m} \div \mathrm{n})$
$= \mathrm{A} \div \mathrm{m}/\mathrm{n}$
$= \mathrm{A} \div \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$

ですから、

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathrm{m} & : & \mathrm{n} \\ = \mathrm{A} & : & \mathrm{A} \times \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}} \\ = \mathrm{A} & : & \mathrm{A} \div \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \end{array}}$$

のように分数表記するのは
比の課題ではなく、
整数乗除と分数表記の関係です。

$\boxed{\div \frac{2}{3}}$が$\boxed{\times \frac{3}{2}}$になる理由の説明は
３つばかりが普及しています。

$\boxed{1}$　÷分数の逆数を
割る数と割られる数の両方に掛ける方法。

$$\boxed{\mathrm{A} \div \frac{2}{3}} = \boxed{(\mathrm{A} \times \frac{3}{2}) \div (\frac{2}{3} \times \frac{3}{2})}$$

$$\mathrm{A} \div \frac{2}{3} = \boxed{(\mathrm{A} \times \frac{3}{2}) \div (1)}$$

$\boxed{2}$　通分の方法

$$\boxed{\mathrm{A} \div \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{A \times 3}{3} \div \frac{2}{3} = \mathrm{A} \times 3 \div 2}$$

$$= \boxed{\mathrm{A} \times 3/2} = \boxed{\mathrm{A} \times \frac{3}{2}}$$

$\boxed{3}$分数を大きさと考えて

$$\boxed{\mathrm{A} \div \frac{2}{3} = \mathrm{A} \div (\frac{1}{3} \times 2)}$$

$$\mathrm{A} \div \frac{2}{3} = \boxed{\mathrm{A} \div \frac{1}{3}} \div 2$$

$\boxed{\mathrm{A}\text{の中に}\frac{1}{3}}$は幾つあるか、と考えると

$\boxed{\mathrm{A} \times 3}$個

これを、２で割ると

$$\boxed{\mathrm{A} \times 3 \div 2} = \boxed{\mathrm{A} \times \frac{3}{2}}$$

どれが解りやすいでしょうか。
一長一短がありますね。
いずれも分数を使っての説明です。どれも子どもたちには少し納得しがたいところがあって説得力に欠けます。やはり、
整数乗除の複合で説得したいところです。

算数は**比**が元

繰り返しになる部分もありますが、
再度申し上げたいことです。

多くのテキストはいきなり

2dl と 3dl を 2：3 と表します。

などと導入します。

しかも、例えば、

2：3 と 20：30 が等しいと言えるのは $2\div3=\frac{2}{3}$ $20\div30=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$など 「前項÷後項の値」を 「比の値」と呼び、 「比の値が等しいとき比は等しい」

などと宣言するのです。

ここで子どもたちには疑問が湧きます。
「何故、前項を後項で割るの？」
「比の値って何者？」
「比の値が等しいとき比は等しいって？」

比の根本的な課題を、
比より後にでてくる比の値、
しかも分数で説明するのは逆さまでしょう、
と思うのです。
$\boxed{\text{比の等式}}$が十分には分かっていない時
さらに知らない$\boxed{\text{比の値}}$で説明するって
どういうこと？

数学は逆さまが多いのです。児童に対し、
うまく言えないなら「言わない方がマシ」。

$\boxed{\textbf{単位を換えて簡単にしたとき同じになる比}}$
の方がずっとマシだと思います。

さらに、(想像ですが)
「比の値」は（英語順で考えるにしても）
元々「前項÷後項」ではなく、
具体例で言えば

$$2 : 3 = \frac{2}{3} : \frac{3}{3} = \frac{2}{3} : 1$$

のように、
「$\boxed{\text{前項：後項}}$の、
　前項も後項も、後項でわった関係」
ではないでしょうか。

日本語順に言えば、

$$2 : 3 = \frac{2}{2} : \frac{3}{2} = 1 : \frac{3}{2}$$

のように、
「後項が 1」ではなく
「前項が 1」の方が分かり易いのですが。

数学はしばしば
数学が出来てきた手順を略するので
意味不明になります。
数学者はそれでも構わないでしょうが、
子どもに教える時はそれでは困るのです。

低学年に比を導入する時には、
「前項を 1」とすると分かり易くなります。

内項の積＝外項の積

中学でもよく使う式ですが、
これの説明をどうしましょうか。
「性質だから」ですましますか。
子どもたちはあまり抵抗しませんが、
なるほど、という説明がほしいですね。

次の例を見てください。

１：２＝５：５×２　　ですね。

内項の積＝２×５
外項の積＝１×５×２

子どもに指導するときは
幾つか具体数を重ねるとよいのですが、
ここでは略します
１：ｎ＝a：a×ｎ　ならば、
内項の積＝a×ｎ
外項の積＝１×a×ｎ

少し飛ばしましょう。

	m	：	１	：	**n**
＝			**a**		

とすると、

	m	：	１	：	n
＝	**am**	：	a	：	**an**

それゆえ、
m：ｎ＝am：an
内項の積＝ｎ×am＝amn
外項の積＝ｍ×an＝amn

子どもたちにとって
分かるか分からないかの境目は、
最後の一般式ではなく、
具体数での自分での計算結果です。

一般式は、
教える方の自己満足でしょう。

ｍ：ｎ＝Ａ：Ｂ
と表している限り、
内項の積＝外項の積の理由は
見つかりません。

『内項の積＝外項の積だから、
ｎ×Ａ＝ｍ×Ｂ』
と宣言されても「そりゃ何じゃ？」です。

一般式でも、次のように表せば、
一致することが見えます。

ｍ：ｎ＝Ａ：Ａ÷ｍ×ｎ
と表せば、

内項の積＝ｎ×Ａ
外項の積＝ｍ×Ａ÷ｍ×ｎ＝Ａ×ｎ
として一致します。

分かってしまえばカンタンなことなのに、
なんだか分からないままに使っている人は
かなり多いと思われます。

子どもは数字で確認が必要です。
類題の出番です。

１：３＝５：５×３

１：４＝５：５×４

１：６＝５：５×６

数学は、先ず帰納法で教えるべきです。
数学の研究も帰納法なのですから！

等分と等倍の複合（分数を使って表す）

下の、左と右の式をくらべてみてください。

$$2 : 1 : 3$$
$$= 20 : \boxed{20\times\frac{1}{2}} : \boxed{20\times\frac{1}{2}\times3}$$
$$= 20 : \boxed{20\times\frac{1}{2}} : \boxed{20\times\frac{3}{2}}$$

$$2 : 1 : 3$$
$$= 20 : \boxed{20\div2} : \boxed{20\div2\times3}$$
$$= 20 : \boxed{20\div2} : \boxed{20\div(2\div3)}$$
$$= 20 : \boxed{20\div2} : \boxed{20\div\frac{2}{3}}$$

$$2 : 1 : 3$$
$$= \boxed{A} : \boxed{A\times\frac{1}{2}} : \boxed{A\times\frac{1}{2}\times3}$$
$$= \boxed{A} : \boxed{A\times\frac{1}{2}} : \boxed{A\times\frac{3}{2}}$$

$$2 : 1 : 3$$
$$= A : \boxed{A\div2} : \boxed{A\div2\times3}$$
$$= A : \boxed{A\div2} : \boxed{A\div(2\div3)}$$
$$= A : \boxed{A\div2} : \boxed{A\div\frac{2}{3}}$$

$$m : 1 : n$$
$$= \boxed{A} : \boxed{A\times\frac{1}{m}} : \boxed{A\times\frac{1}{m}\times n}$$
$$= \boxed{A} : \boxed{A\times\frac{1}{m}} : \boxed{A\times\frac{n}{m}}$$

$$m : 1 : n$$
$$= A : \boxed{A\div m} : \boxed{A\div m\times n}$$
$$= A : \boxed{A\div m} : \boxed{A\div(m\div n)}$$
$$= A : \boxed{A\div m} : \boxed{A\div\frac{m}{n}}$$

第２項を抜けば、見慣れた比になります。

左と右の式をよく見比べてください。

前項が 20 ならば、

$$
\begin{aligned}
&2 : 3\\
&= 20 : \boxed{20 \div 2 \times 3}\\
&= 202 : \boxed{20 \div (2 \div 3)}\\
&= 202 : \boxed{20 \div \frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2 : 3\\
&= 20\frac{1}{2} : \boxed{20 \times \frac{1}{2} \times 3}\\
&= 20\frac{1}{2} : \boxed{20 \times \frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

前項がＡならば、

$$
\begin{aligned}
&2 : 3\\
&= A2 : \boxed{A \div 2 \times 3}\\
&= A2 : \boxed{A \div (2 \div 3)}\\
&= A2 : \boxed{A \div \frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2 : 3\\
&= \boxed{A}\frac{1}{2} : \boxed{A \times \frac{1}{2} \times 3}\\
&= \boxed{A}\frac{1}{2} : \boxed{A \times \frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

前項がＡならば、

$$
\begin{aligned}
&m : n\\
&= Am : \boxed{A \div m \times n}\\
&= Am : \boxed{A \div (m \div n)}\\
&= Am : \boxed{A \div \frac{m}{n}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m : n\\
&= \boxed{A}\frac{1}{m} : \boxed{A \times \frac{1}{m} \times n}\\
&= \boxed{A}\frac{1}{m} : \boxed{A \times \frac{n}{m}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{m : n}$ の両方の項を

$\boxed{m}$ でわると

$$m : n$$
$$= \frac{m}{m} : \frac{n}{m}$$
$$= 1 : \frac{n}{m}$$

である。

$$m : n$$
$$= A : \boxed{x}$$

ならば、

$$= 1 : \frac{n}{m}$$
$$= A : A \times \frac{n}{m}$$

$$\boxed{x} = A \times \frac{n}{m}$$

元の式が右の式と同じなのに、
こちらは「×分数」です。

左と同じ

$\boxed{m : n}$ の両方の項を

$\boxed{n}$ でわると

$$m : n$$
$$= \frac{m}{n} : \frac{n}{n}$$
$$= \frac{m}{n} : 1$$

である。

$$m : n$$
$$= A : \boxed{x}$$

ならば、

$$= \frac{m}{n} : 1$$
$$= A : A \div \frac{m}{n}$$

$$\boxed{x} = A \div \frac{m}{n}$$

元の式が同じで、
左の式が「×分数」なのに、
「÷分数」になりました。

速さ×時間＝道のり
道のり÷時間＝速さ
道のり÷速さ＝時間

上の公式が「わからない」と言う子どもは
非常に多いのです。

３㎝/秒×２秒＝６㎝
６㎝÷２秒＝３㎝/秒
が分からないという子どもに
速さをどう説明しましょうか。
まして、
６㎝÷３㎝/秒＝２秒
をどういえばよいのやら。

この問題は６年生まで待って説明すべき
独特の問題だろうか。
低学年の掛け算＆割り算の問題とは
別個なのだろうか。

単価×個数＝総額
総額÷個数＝単価
とどこが違うのだろうか。
単に単位が違うだけの話ではないのか。

10円/個×3個＝30円
30円÷3個＝10円/個
とどこが違うのか。

さすがに、
30円÷10円/個＝3個　の式は
４年生で『分かりやすい』と言う子は
３分の１くらいでした。

左の式を『分からない』と言う子どもに、
「はじき」で「便利やろ？」と済ます
先生は多いのです。

きょり 距離	
はや 速さ	じかん 時間

速さ×時間＝距離は

き	
は	じ

は×じ＝き
という風に覚えれば良い、との考えです。
(「はじき」は拳銃の俗称。辞書にはありません。)

「分からなければ覚えて使え」です。

世の中に、
「分からないけれど使える」ものは
たくさんあります。
しかし、
算数の世界ばっかりは
なんとかわかって進みたいものです。

数学ではどう考えるべきなのか。
数学は単純明快です。

これも単純な比の問題となります。

	１秒	：	２秒
＝	３㎝	：	３㎝×2

「**時間**が２**倍**になるので、
距離も２**倍**になる」

この説明で
「分からない」と言った児童・生徒は
いませんでした。

何故「速さは分からない」
と子どもは言うのでしょうか。
理由の大半は次のとおりです。

その一つは
比の４つの数の関係なのに
２つの数で他の１つが求められるという
３つの数の関数関係にしているから。

二つめは、
物理式なのに、
数学として説明しようとしている。

三つ目は、
いきなり動きのある内容である。

仮にこのような式を使うにしても、
総額÷個数＝単価など
もっと普通のところで導入すべきです。
少なくとも
既に学んだ関係をこのような式に表す
と説明してから使うべき。

しかし、
単位付きの物理式は
説明しきるのは難しい。

しかし、

単位付き式って便利です！

「単位付き式」は、物理式ですから、
『わからない』と言う者に対しては、
数学よりは説得力がありません。

しかし、判る者にとっては、
これはとても便利な式です。
問題文を読まなくとも、
どのような内容を表しているのか
一目瞭然です。

例えば、

15 個÷3 人＝5 個/人

15 個を３人で分けたら、一人５個です。
一目瞭然ですね。

５円/人×3 人＝15 円

一人が５円ずつ持っています。
3 人のお金を合わせると 15 円です。

15 円÷5 円/人=3 人

15 円を一人に５円ずつ分けたら、
３人に分けられます。

数学者が何と言おうと、
算数教育では
単位付き式を教えるべきだ
と思われませんか。
それほど素晴らしい式です。

物理と数学

そもそも、
数学者は、単位付き式を
数学とは認めていないそうです。

物理学者は、
単位付き式も「当然数学だ」と考えて
使っています。

みなさんはどちら派ですか。
これが算数教育業界では
結構な論争の的なのです。
小学算数を教える先生も
よく考えている人は困っています。

数学者のうち東京工業大学など
物理系の学者が一杯いる大学の先生は
単位付き数式を数学と呼ぶ派
の人が多いようです。

東京大学の宇宙物理学者杉本大一郎氏の著
≪数理リテラシー≫は
『数学者の友人からは
“数学の精神と体系に合わない”
と言われたが、
使う人からは一定の評価を得た』と、氏の
別の著書≪外国語の壁は理系思考で壊す≫
の中で紹介しておられます。

そこで、提案です。

数学者が数学とは認めない単位付き式は
やはり、算数の考えで説明することはやめ、

「それは物理式」と

宣言するのは如何でしょうか。

数学的ではあるにしても
数学者が認めないものを
数学として説明しようとしても
数学としての整合性を欠きます。
物理式とするなら、
数学者が口をはさむ問題ではありません。

単位付き式、即ち物理式は、
状況が判り易く便利です。
しかし、物理ですから、
最後まで納得する説明をすることは
必ずしも可能ではありません。
別にそうであっても、
数学に卑下する必要はありません。
物理は物理で立派です。
数学の範疇に入ろうとしなければ
平和共存できます。
物理式が
『数学でない』と言われたからと言って
物理として別に不名誉なことではない、
と思うのですが。

メートル法のまとめ

まとめは小学五年のところで説明します。
ただ、
「中学３年の相似の単元を待って、
面積は相似比の２乗に比例し、
体積は相似比の３乗に比例すること
を学ばせる理由が分からない」
とだけ付け加えておきたい。

「体積が３乗に比例する」ことは、
小学社会の雨の雨量などの説明で
是非とも必要な考えなのですから。

例えば、次のような例です。

「細かい雨を計算上立方体と考えて、
一辺が 0.1 ミリメートルの雨と
一辺が１ミリメートルの雨を比べると、
体積は 1000 倍になります。
ですから、
大きい粒の雨が１分間に降る量は、
小さい粒の雨が 1000 分、つまり、
およそ、17 時間近く降るのと同じです。
集中豪雨の怖さがわかりますね。」

と説明するところです。