中学１年生　　負の数の発明

中学一年の数学のメインは、何と言っても
「**負の数**」と「**方程式**」ですね。
困ったことに、この二つの名称が
生徒の学習の邪魔をします。

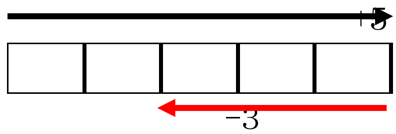
「**負**」の数なんて可哀想じゃあないですか。
何故「負」の数なのでしょう。
しかも相手は「**正**」の数ときては
負の数の立つ瀬がありません。

正の数、負の数などという
価値のともなった名称に何故したの？
右の数、左の数ではいけませんか。

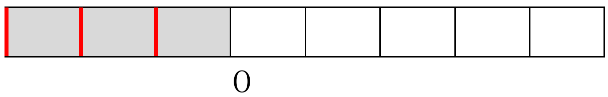
言っても仕方がないので、
何かしら良いこともあるのだろう、
と思って使いますが、まあ、
右と左くらいに思って使っているのだ、
としておいてください。

さて、
小学三年生のところで、
レンガを並べて
色々な数の出来方を見たように、
その続きに負の数はできます。

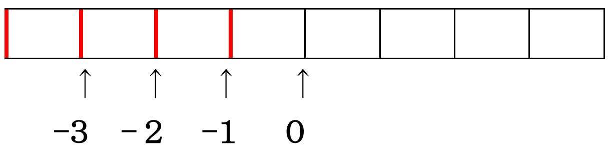
右方向へ進むのが足し算、
左方向へ進むのが引き算ですね。



さて、先に、
ゼロから**右**へ並べましたが、
今度は、左へ並べていきます。
右向きに並べたら、
次は誰だって左向きです。



レンガのそれぞれの左端に
何と名前をつけましょうか。
右へ進むのが足し算、
+1、+2…+3、………
左へ進むのが引き算とすれば、
−1、−2、−3、……………
としましょうか。



「点の個数」を数えていては
決して到達しなかった負の数が
何の障害もなく出来るのです。

考える材料をどのようなものにするかで、
こんなにも違いがでます。
抽象は便利ですが、
必ずしも良い面ばかりとは言えません。

負の数を含む計算

負の数が出来たところで、
数直線上で次のように考えてみます。

まず、右向きか左向きか
そして、（**前進**）か（**後退**）か、
これを組み合わせます。

自分が動くと想像してみてください。

０の地点から「**右**向き」か「**左**向き」か、
次に「**前進**」か「**後退**」かです。

左右の向き	（前進）か（後退）か	結果
右向き	（前進）３歩	右３
右向き	（**後退**）３歩	**左**３
左向き	（前進）３歩	**左**３
左向き	（**後退**）３歩	右３

歩が消えているのは許されよ。

右向きを＋	左向きを－
前進を（＋）	後退を（－）

と表すことにすると、
上記のことは順に

あ	＋	（＋3）＝	（＋3）
い	＋	（－3）＝	（－3）

か	－	（＋3）＝	（－3）
き	－	（－3）＝	（＋3）

３が２や８など、どんな数になっても
プラス・マイナスの計算は
これで決定されます
操作・行動として実感できます。

右と左を上と下にすれば、もっと、
＋（プラス）と－（マイナス）が強く意識されるでしょう。

あとは、いくらでも応用はあります。
「増える・減る」と「財産・借金」
の組合せなどは迫力あるかもしれません。

負の数の色々の側面を紹介する意味で
教科書はいろいろな場面を示していますが、
苦手な生徒は押し寄せる様々なものを
吸収する力が無く混乱しています。

得意な生徒でもいちいちそれに対応せず、
一つの考え・方法、即ち
一般法則に帰着させているようです。

たくさんあることが
かえって理解を困難にさせています。
ならば、絞った方が有効です。

二つの種類のプラスとマイナスの合成が
負の数の計算の真骨頂でしょう。

左の表は、順を換えると

あ	＋	（＋3）＝	（＋3）
き	－	（－3）＝	（＋3）

い	＋	（－3）＝	（－3）
か	－	（＋3）＝	（－3）

プラスにしろ、マイナスにしろ
同符号が並ぶと**プラス**になります。
異符号が並ぶとマイナスになる
ということが分かります。

ところで、
プラス・マイナスの組み合わせについて
足し算・引き算とも
掛け算・割り算とも言いませんでした。

$\boxed{-(-3)}$ **は、**
「(−3) を**引いて**いる」のか、
「(−3) に**−**(マイナス)**を掛けて**いる」のか
どちらでしょうか。

どちらとも考えられます。
ということは、
「引くこと」と「マイナスを掛けること」は
同じことの
別の言い方なのでしょうか。
それとも、
異なることなのに
見え方が一致しているのでしょうか。

いずれにしても
このプラスとマイナスの導入方法は、
知らずして、素晴らしいことを
教えてくれることになります。

「マイナスの数を引く」ことと
「マイナスを掛ける」こととが一致する
数学的理由があるのでしょうね。
ここでは、
課題として残しておくことにしましょう。
第五章の「数について　その2」を
参照してください。

点を数えていては見えなかったことが、
レンガを並べるように数を考えると
素晴らしい世界が見えてきました。

ものごとを考える時、
その材料が本当に大切なことを
教えてくれています。

具体は、発見の女神です。

交換法則

ところで、小学校では

（3＋2）は（2＋3）と
符号の前後を入れ替えられるが、
（3－2）は（2－3）とはできない

と言われています。
それはその通りです。
しかし、これは巷の俗説で

数学の**加法の交換法則**は

そのようなことは言っていない
と思います。

負の数の計算で見られるように、
A－3 は、A＋（-3）ですから、
減法は加法に吸収されます。
そして、例えば
a＋b の b がマイナス 3 であれば、
b＋a＝（-3）＋a が可能です。
引き算を含めて交換可能なのです。

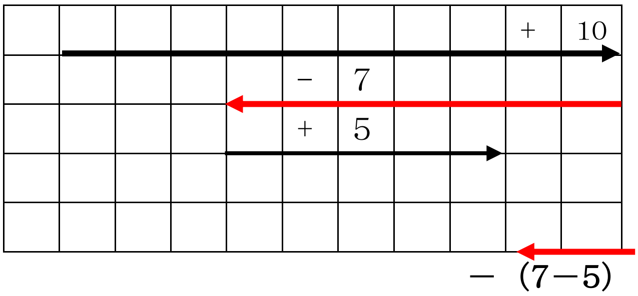
ついでながら、
3－2 は 2－3 にならないことなど、
小学生に対しても言う必要はありません。
小学生をバカにしてはいけません。
そう思われませんか。
数学的原理のように言って、
中学数学との整合性をなくす方が問題。

それより強調しなければならないのは、
足すことと引くことの順序は
入れ替えが可能であることの方です。

10　＋3　－2
＝10　－2　＋3

負の数を学ぶ前には
$\boxed{0+3-2}$ を $\boxed{0-2+3}$ の順にすることは
いささかはばかられますが、
役にも立たないことを教えて
大事なことを言い忘れるのは困ります。

もう一つ、
10－（7－5） を
中学の負の数の新しい問題と見るのは
いかがなものでしょうか。
小学生の間に、



10－（7－5）
＝10－7＋5
と考えられる感覚が大切です。
引く数 7 から 5 を引いてから引く、
ということは、
7 を先に引いたら、あとで 5 を足すこと
と同じです。

ついでながら、ここでも繰り返します。
12÷4×2 が
12÷（4÷2）になることにもつながります。
12 を 4 で割ってから 2 倍することと、
割る数の 4 を 2分（ぶん）してから割ること
は同じことになります。

文字式

文字式に、
新しい数学的意味は特にありません。
これは、表記の約束ですから。
しかし、これが思考の一般化を楽にします。

百の２倍は２百 千の２倍は２千 同じように、 ａの２倍は２a

このように、
すでに知っていることがらを使って
新しい表現を導入すれば
小学生もかんたんに理解します。

何事においてもそうです。
数学の学習のあらゆる場面で
既知の内容を新しい表記法で表現した後、
未知の内容を
今知った表記法で示してほしい。
そうすれば、
どれだけ学習がカンタンになることか。
数学だけではありません。
英語でも、
新しい文型を新しい単語で示すことは
やめてほしい、と思ったものです。

文字式で注意すべき間違いやすい点は
次のことです。

一つは
Ａ÷Ｂ×Ｃと
Ａ÷ＢＣは違うということです。
同じように、
Ａ÷Ｂ÷Ｃと
$A \div B/C$、$A \div \frac{B}{C}$ とは違います。
Ａ÷Ｂ÷Ｃ＝Ａ÷（Ｂ×Ｃ）＝Ａ÷ＢＣ
です。

方程式を学んだ後に、
次の文字式の計算を間違う生徒が多い。

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$$
$$=3x+2x$$

としてしまうのです。
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ も $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}$
は間違わないのに、です。
ｘを見たらすぐに、方程式！
と反応しているのですね。

そしてまた、
方程式の単元で、
文字式を学習しているうちは考えもしない
分母をはらうというセリフを知るからです。

このセリフも又
原理を示さずに方法を教えています。
「等式の両辺におなじ数を掛けても
等式は維持される」と言いつつ
方程式の分母に最小公倍数をかけていたら、
$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$が等式ではないことに気づきます。
方法論的名称で考えると危ういのです。

等式の一つとしての方程式

「ｘ＋2＝5
　このｘはいくらですか？」
『3 です。』
「どうやって３とだしたの？」
『5 から２を引きました。』
「ホントかい？
　ぱっと見てわかったんじゃあないかい？」
『そんな気もする。』

大体こんな感じです。

小学一年生ならば、
□＋2＝5 を見たら、
この足し算の形のままで３と答えます。

高学年になると、
『何かに２を足して５なんだから、
何かは５から２を引いて 3』と答えます。

これからが説得です。
「君はお向かいにお使いに行くとき
どうやって行きますか」
『歩いて行きます』
「2 ㎞ほどある公園はへ遊びに行く時は？」
『自転車で行きます。』
「かなり遠いお店に買い物に行く時は？」
『自動車で行きます』
「君はくるま運転できるか？」
『ノー』
「運転をおぼえなくっちゃあね」

「それと同じで、
方程式を解く時に、
ぱっと見て分かるから答えはこれ、とか
足したから引くとか
の方法を使わないでほしいんだ。」
「等式の性質は、
車の運転を覚えるようなもので
あとで大きな力を発揮するから、
是非とも覚えて使ってほしい。」
「歩いたり、自転車だったりでは
運べない物を運ぶ力を持ってほしい。」

との前置きから始めます。
そうでなければ、内緒で
ぱっと見て答えたり、
足したから引く、
の方法でやっちまうのです。
そして後で困るのです。

教科書は
方程式の解き方として、
等式の性質を解説した２ページのすぐ後で、
移項を説明し、以後、移項を使います。
等式の性質、という言葉は聞かれません。
当然だからでしょう。

移項の生まれた道筋を
判っていて使うのならよいのですが、
「符号を換えてあっちへ持っていく」では、
だんだん訳が分からなくなります。

あろうことか
３ｘ＝5 を、両方から３を引いて
「ｘ＝2」などとする子が現れます。

等式の性質を使って方程式を解いていると、
だんだん、数学の理解が深まります。
しかし、
方法論で解いていると
次第に理解から遠ざかります。

等式の性質四つは
完全に暗誦して使いこなすことが大切です。

数学者の中に、
移項のことを
「移項の原理」と呼ぶ人がいます。
数学については知りませんが、
中学数学の段階では
少なくとも時期尚早です。
等式の性質を使って解くようにしましょう。

等式の性質

等式の性質Ⅰ 等式の両辺に同じ数をたしても 等式は成り立ちます。
等式の性質Ⅱ 等式の両辺から同じ数を引いても 等式は成り立ちます。
等式の性質Ⅲ 等式の両辺に同じ数を掛けても 等式は成り立ちます。
等式の性質Ⅳ 等式の両辺を同じ数でわっても 等式は成り立ちます。

赤字で書いたてにをはが
でたらめな子がたくさんいます。
しっかりした練習には
聴き手が必要です。

この四つの性質を使って解いておれば
方程式の理解は深まります。

それは、
数学の理解が深まることにもつながります。

特筆大書してほしいことです。
なので、繰り返しています。

空間図形

見取り図

これは何と言っても
実物を先ず体験することが必要です。
私たちは、つい、子どもたちが
既によく知っていると思いがちです。

また、
実物を見たことがあったとしても、
見取り図を見たことがないこともある。
また、
見取り図を見たことがあっても
見取り図を描いたことが無いこともある。

いずれの場合も、
本人の可能性の能力にかかわらず
非常に困難なことになります。

逆に言えば、
それらの体験があれば一気に解決です。

正多面体の面・辺・頂点の数の関係について
ての学習が中学一年まで待つ必要はない。
小学二年生で十分できますし、その方が
面白がってやれます。
正四面体の面・頂点・辺、
立方体の面・頂点・辺を数えさせて
その関係を尋ねれば、
面＋頂点＝辺＋2
くらいは見つけるものです。
見つけられないからといって、
残念がるほどのことではありませんから、
教えて、その後確認させれば
それでオーケーです。

空間図形の計量

円柱の中に球が内接しています。また、
同じ円柱の中に底面積と高さの等しい
円錐があります。
この、円柱と球と円錐の
体積比を求めなさい。

円錐の体積は、円柱の３分の１ですから、

円柱：円錐＝$1:\frac{1}{3}=3:1$

円柱の体積＝$\pi r^2\times 2r=2\pi r^3$

球の体積＝$\frac{4\pi r}{3}$

円柱：球＝$2\pi r^3:\frac{4\pi r}{3}=3:2$

よって、
円柱：球：円錐＝3：2：1

この比を見てどう思う？と尋ねられて、
『別に』か、
『ふーん』ですますか、
『美しいなあ、不思議だなあ』と思うかが
数学に向いているかどうか
を決めると思います