２年生

少し話が広がりますが、教科書などの章立てのことです。
ふつう、次のような感じです。

中学一年	中学二年	中学三年
第一章　負の数	第一章　文字式	第一章式の展開と因数分解
第二章　文字式の使い方	第二章　連立方程式	第二章　平方根
第三章　方程式注1&注２	第三章　一次関数	第三章　二次方程式
第四章　正比例と反比例	第四章　図形	第四章　三平方の定理
第五章　空間図形	第五章　確率	第五章　相似
第六章　統計		

これだと、体系があまりよく分かりません。
ですから、生徒は数学の教科書を体系的に見ようとしません。
少なくとも生徒であった私にはよく見えませんでした。

注１
一元一次方程式だけなのに、
方程式という名乗りが大きすぎて分かりづらい。
注２
「方程式」とは、「等式」の中の一つなのに、
一般のテキストでは
「方程式の中に等式の性質を説明している」のが気持ち悪い。
部分の中に全体があるのが気持ち悪いので、
三学年を通じて、全体の名称を**等式**とする。

そこで、
次のような章立てにしたらどうか、と考えてみました。

章	中学一年	中学二年	中学三年
第一章　**数の拡大**	負の数		平方根
第二章　**文字式**	文字式の約束	文字式の計算	式の展開と因数分解
第三章　**等式**注２	一元一次方程式	連立二元一次方程式	一元二次方程式
第四章　**関数**	正比例と反比例	一次関数と連立方程式	$y=ax^2$
第五章　**平面図形**	作図	図形の証明	三平方の定理＆相似
第六章　**空間図形**	空間図形と計量		空間図形への応用
第六章　**その他**	統計	確率	

無い単元も、無いことが分かるようにしてもらいたいのです。
見かけは些細なことですが、展望がきくというのは、学習者にとって重要だと思うのです。

文字式

間違いやすいのは

$\frac{2x-7}{3}-\frac{3x-4}{5}$のような問題です。

通分の時、負の数の処理を誤りがちです。

$\frac{5(2x-7) - 3(3x-4)}{3 \times 5}$

の式をきちんと書けばまちがいません。

通分と**掛けこみ**と**負の数の処理**を
一度にしようとして間違います。
早く仕上げたい一心で
どこかを省略して間違うのです。

文字式と方程式との混同

中学一年のところでも述べましたが、

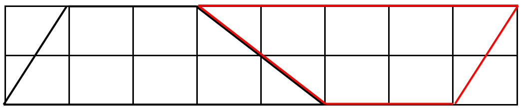
$\frac{2x-7}{3}-\frac{3x-4}{5}$

の分母をはらって、
5（2ｘ-7）－3（3ｘ-4）
とする子がたくさんいます。

「式の計算」と「方程式」との混同です。
数学の理解の根本にかかわるところです。

文字式の変化と図形の変形

例えば、台形の面積の求め方は、
（上底＋下底）×高さ÷2 ですが、
これは、
もう一つ同じ台形を逆さまにくっつけると
（上底＋下底）を底辺とする平行四辺形が
できるところからの式です。
これを図解すると次のとおりです。



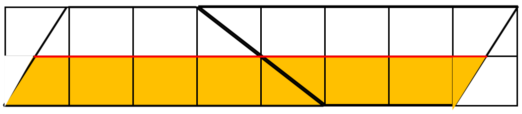
上底＝a　下底＝b　高さ＝h　　面積＝s

とすれば　$s=\frac{(a+b)h}{2}$

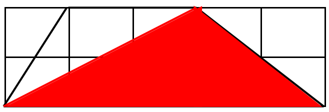
上の式を次のように変化させてみます。

$s=\frac{h}{2}(a+b)$

この図はつぎのとおり。



$s=\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}$　ならば、



２つの三角形に分けることになります。

例示不足ですが、
“ゆとり教育”が狙っていたのは多分
このようなことだったのでしょう。
しかし、狙いが良くとも、
実際を担う人々が理解し実践できなければ、
あるいは、旗振り役がそれを示せなければ、
残念！なことになるわけです。

連立二元一次方程式の解き方

中学２年の一般のテキストは、
「連立方程式の解き方」として、
「**加減法**と**代入法**」を説明します。

「加減法」とか「代入法」と言う名称は、
方法論的な名前なので、
数学の原理の理解を深めるとは思えません。

例えば、
次の上の式から下の式を減ずると、

	2ｘ	＋	ｙ	＝	13	
―)	ｘ	＋	ｙ	＝	8	(―
	ｘ			＝	5	

ｙが消えているので

消去法とも呼ぶわけですが、

これの原理は、一年生で学んだ
「等式の両辺から同じ大きさを引いても
　やはり等式は成り立つ」
という**等式の性質**にあります。

そして、この等式の性質を使っていると
理解は深まり、
分からない、ということがありません。

そうです、方程式は、
等式の性質を使って解くべしです。

2ｘ	＋	ｙ	＝	13		①
ｙ	＝	ｘ	―	2		②
2ｘ	＋	ｘ-2	＝	13		

教科書では、
①式のｙに、

②式のｘ-2を**代入**します。

$\boxed{y}$の代わりに$\boxed{x-2}$を入れるので

代入法と呼ばれるのですが、

この用語も原理を示している様には見えず
方法論的です。

そこで、例えば、

4＝1+3 ですから、
9 +4 ＝ 9 +1 +3 のように、
等しい値の「4」と「1+3」は
交換することが出来ます。
これを、私の提案ですから
一般に馴染みのない言葉ですが、
等値交換の原理と呼んで使うのは
如何でしょうか。

この考えは子供たちも良く理解しますし、
使っていると理解は深まります。

方法論的な名称は、
原理を忘れていると
使えば使うほど理解から遠ざかります。
原理を示す言葉は
使えば使うほど理解が深まります。

一次関数

これは、もう何と言っても

変化の割合です。ところが、

これがまた
この用語に翻弄されるのです。
変化の割合ってなんだか意味ありげで
分かり易そうな名前だと思われませんか。

そこでつい、「変化の割合とは何か」
と考えてしまうのです。
しかし、この名前は最初、

$\frac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}} \Rightarrow \boxed{\text{変化の割合}}$

と名付けられたものです。
変化の割合とは何かと考えるのは
考える順序が逆です。

多くのテキストでは、
「ｘの増加量に対するｙの増加量の割合」
を「変化の割合」と言う、と説明されます。
この文章は理解されにくいものです。
小学五年生の割合の単元を
よほど上手に教えられ、
子どもも十分に
勉強した場合に限って役立つ流れです。

$\frac{\text{yの増加量}}{\text{xの増加量}} \Rightarrow \boxed{\text{変化の割合}}$

はあちらこちらに変化して現れます。
ｙ＝ax＋b　の **a** として。
グラフの**傾き**として。

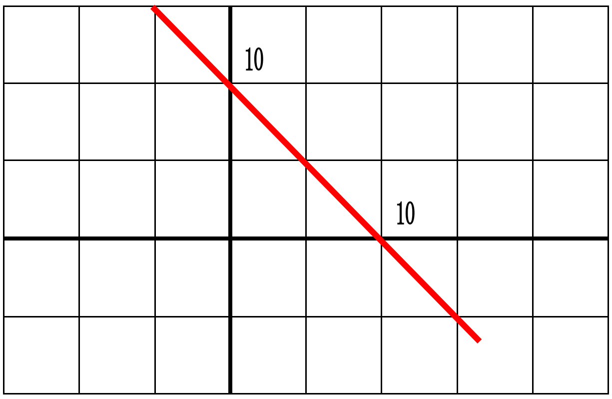
一次関数と

そのグラである**直線**と

二元一次方程式は

同じことの別の表現方法です。
このことの理解がこの単元の要です。

①　ｘ＋ｙ＝10　　　ならば、
　　　　両辺からｘを引いて
②：ｙ＝10－ｘ　　ならば、
　　ｙ＝－ｘ＋10
③：②をグラフ化すると

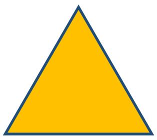


①　②　③の三つが
ｘとｙの同じ関係を表しているなんて
なんだか不思議な感じがしませんか。

一次関数の最後の方で解説されるのですが、
ソロソロくたびれかけた時に出てくるので
半知半解の生徒がたくさんでます。

今の数学者が考えていることは想像できませんが、昔の数学者は、
私たちが学校で学習していることを見て、
いろいろ操作してみたのでしょうね。

図形の証明体系



「**正三角形とはどのような図形ですか**」
の問いに、
『三つの辺の長さが等しくて、
　角は全て 60 度』と答える生徒が多い。

この答えが、
中学二年の証明問題に答えられない理由であることがお分かりになるだろうか。
そう、
図形の定義と性質が混在しているのです。
この図形の定義と性質というのは、
図形にとって必ずしも本質的なことではないので、分かりにくいところがあります。

ギリシア時代に、正三角形の定義を
「三辺の長さが等しい三角形」と決めて、
その後みんながそれを踏襲しているだけのことなのです。
小平邦彦著「幾何への誘い」の中で、
「三辺が等しい三角形を正三角形」
と定義しても、
「三つの角が等しい三角形を正三角形」
と定義しても、どちらの体系も成りたつ、
と書いておられます。

そういうことですので、
この単元はギリシア時代の約束に従う、
と宣言しなければなりません。

仮定とは

「仮定・結論・証明」という用語も、
初学者にはとっつきにくい言葉です。

なぜなら、
問題の結論が初めて見るものなのに、
それを証明せよ、と言われてもなあ、
という感じです。

それに、
そもそも「仮定する」って
どんな価値があるのかなあ、です。
日本語で「仮定する」と言えば、
どちらかというと、
「そんなことはまあ無いのだけれど……」
のようなことを言います。
それに基づいて「**結論**」を宣言し、
さらに、いつでも成り立つことを
「**証明する**」と主張するというのですから、
ますますどうだろうかと思えてきます。

採点する方も、
解答の証明全文を読むのも面倒なので、
穴埋め式の問題になります。
生徒は、他人の証明の流れを読みながら穴埋めするのですから、
あまりファイトが湧きません。

さて、どう考えましょうか。

仮定の真の意味

ギリシアの本には
「**もし**、三角形の二辺が等しいならば
二つの底角は等しい」
などと書かれているそうです。
そこから、翻訳する時に、
「**もし**」なら
「**仮定**」だと決めたのでしょう。

ところで、日本語では、
「もし……………ならば」は、
「もし万が一」とか
「無いとは思うけれどもしあったら」など
と、はなはだ儚(はかな)い感じの言葉です。
そんな儚い物事を「厳密に証明しよう」
などと誰が考えるでしょうか。

とすれば、ギリシア時代の人の考えは
違ったものだったはずです。
想像するに、ギリシアの人々は
「もし**本当に**……………ならば」
と考えたはずです。

「ホントに二辺が等しいならば
　二角はいつも等しいと言える」
とでも訳せば
その意図するところが通じるでしょう。

ついでながら

古代ギリシア人は、
「同じ長さを**実際には**描くことが出来ない」
と考えていました。

な　ぜ　描　け　な　い　の　か　。

それは、古代ギリシア人が
物事の究極の単位をアトム、即ち
これ以上分割できない大きさまで
イメージして考えたからです。
それは、現実には実現できない
理想(イデア)の世界なのです。まあ、
私たちが鉛筆で描いたと思ってください。
コピー機で繰り返し拡大すれば
線ひとつも棒のようになり、
線ではありません。

線とは
「幅の無い長さだけの存在」とも考えた
古代ギリシア人の厳密さと抽象性は
理論としての美しさを実現しました。
現実は、理論を実現できない、
理念だけが真実を表現できている
と考えたギリシア哲学は、
現実から遠ざかっていってしまいました。

しかし、ギリシア人も現実から
理念(イデア)の世界に到達したのですから、
新たに数学を学ぶ後世の人間も、
理念から出発するのでなく
現実の鉛筆で書かれた線の世界から
出発しなければいけません。
理念から出発しようとすると
失敗します。
「幾何学は鉛筆と定規・コンパスの科学」
という言葉が、≪幾何学への誘い≫の中で
激賞されています。味わい深い言葉です。

図形の定義を覚えよう

図形を議論するためには
定義を覚えなくては、話は始まりません。

ただし、
「正三角形は三辺の等しい三角形のこと」
ではだめです。
「三辺の等しい三角形を正三角形と言う」の
形にすべきです。
これは、かなり根本的なことです。

名称を先に出し、
後に説明するのが英語順ですが、それは、
初めに言葉ありき、の考え方です。
人間、少なくとも日本語人の感性に合いません。名称は後で出来たものです。

例えば「菱形」のように、
仮に名称が別に先にあったとしても
体系化された数学の中に取り入れられたときに、順序は変わっています。

三角形の名称は、
定義に近く名づけられています。
二等辺三角形・直角三角形・
直角二等辺三角形などなど。

四角形の定義は、菱形や台形のように、
一般生活用語の中からとられたものが多いので注意を要します。

図形の性質を知ろう

知らない性質を示されて、
まだその事実を認めることが
出来ていない状況のなかで、
それを証明せよ、と言われてもなあ、です。

まず、事実を知ることからです。つまりは、
図形証明の問題は勉強した者の勝ちです。
ほとんど知っているかどうか、です。
問題の事実とその証明方法を
知っているかどうか、です。

なんだ、そんなことが証明か、
といった風に思えることも沢山あります。
約束事の多い世界です。
一人で考え過ぎても無駄骨です。
昔の天才集団の作り上げた
約束事の世界でもあります。
手本に従って勉強の必要な単元です。
手本に従えば学校で出題される問題は
さほど困難なものはない、
と言って差し支えないでしょう。

平行四辺形は、
色々の問題をふくめて勉強すると
大変おもしろいテーマです。
円に関連する問題は
あちこちの学年に散らばっていますが、
一貫して見ると実に興味深いテーマです。

論証のための公理・定理

図形の根本的な議論ですから
図形だけの世界かと思ったら、結構、
算数のルールが使われるので
中学生の私はびっくりしました。

「二等辺三角形の両底角が等しい」
の証明に
ターレスの方法が使われない理由が
わかりません。ターレスは
「三角形を裏返しにして一辺を重ね、
長さが等しいからぴったり重なる。
頂角が等しいからもう一辺とも重なる。
その辺も長さが等しいからぴったり重なる。
だから、両底角も重なって等しい」
といっています。
説得力があると思います。
断然ターレスの方法だと思うのですが、
なぜか、二つの三角形に分けて
その合同から導きます。
二辺とその間の角を使っていて、
直角三角形とは言っていませんが、
二等辺三角形よりもあとに出てくる
直角三角形の登場です。
ことほど左様に、約束事の世界です。

図形の証明が分からない、と言う子に、
非常によく考えている場合があります。私は、中学校時代に、
相似の原理が怪しげなのに、
証明方法ばかりが厳密っぽいと思えて
気に入りませんでした。

そういうことですから、
よくよく考えるのも考えものです。

だから、
この図形の単元は、教科書に従い、
「そういう考え方をするのね」
と言うとおりにしましょう。

いや本当に、
「図形の証明がわからない」
と言う子がいっぱい居るのです。
先人が作り上げた約束事の多い世界を
真理の世界のように紐解こうとすると、
「わからない」となりがちです。