中学３年

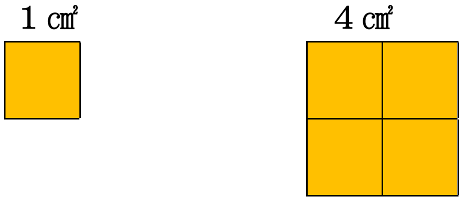
平方根は

先ず、正方形の**対角線の長さ**から。

平方根は、
小学５年生で学ぶ
小数×小数の計算が出来るようになれば
計算機を片手に少しのステップで
理解できます。

平方根のうち、
負の数になる部分を後回しにすれば
すぐに、平方根の根本は理解できます。
小学生に
「これが中学３年の数学」と伝えれば
『中学数学は自分にも出来そう』
と自信を持ってくれます。
自信が生まれれば、
道がついたのも同然です。

あとは、
「負の数×負の数＝正の数」
を知る日を待つだけです。それも、
根本的に難易度の高い話ではありません。
説き方次第です。（解き方ではありません）
中学一年の「負の数」を見てください。



子どもたちに、
「この１㎠と４㎠の間に
　一辺の長さは分からないが
　面積が２㎠の正方形はあるだろうか」
と尋ねると、
或る子は『有る』と言い、
或る子は『無いと思う』と答えます。

多分、『有る』と答えた子は、
単純に、知らないけれどあるはず、と。
正しい感覚です。

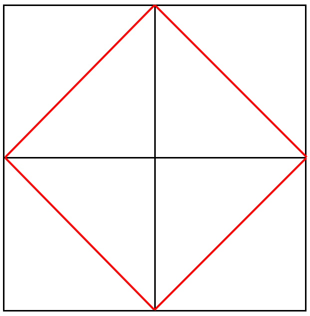
『無い』と答えた子は、考え過ぎで、
辺の長さが小数になると思うけれど、
きちんとした小数で答えられないので、
書けないから作れない、
と考えたのでしょう。
正しい感覚です。

「もっと方眼紙を使おう」と言われたのは
戦後、民間の算数教育に力を注がれた
遠山啓先生でした。
ご著書でかなり影響をうけました。
単位をつけた式を、小学三年生にも
ずいぶん頑張って教えました。

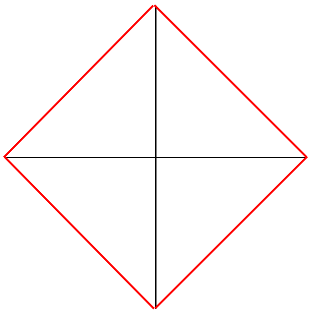
方眼紙を使えば、
平方根や三平方の定理など、
かなり下の学年の子にも
教えることができます。
古代のギリシア哲学者も
方眼の石畳を見て気づいたと聞きます。

以下、教材的に進めます。
赤字部分が生徒の解答すべき課題です。

４㎠の図形に、４本の**対角線**を引きました。



そこでできた、



この正方形の面積は

$\boxed{2}$ cm^2 です。

この正方形の一辺の長さを
小数で求める手順を考えなさい。

次の計算は計算機を使いなさい。

$1.4 \times 1.4 = \boxed{1.96}$

１。５×１、５　＝ $\boxed{2.25}$

それゆえ、一辺の長さは

$\boxed{1.4}$ と $\boxed{1.5}$ の間にあるはず。

$1.41 \times 1.41 = \boxed{1.9881}$

$1.42 \times 1.42 = \boxed{2.0164}$

それゆえ、一辺の長さは

$\boxed{1.41}$ と $\boxed{1.42}$ の間にあるはず。

$1.414 \times 1.414 = \boxed{1.999396}$

$1.415 \times 1.415 = \boxed{2.002225}$

それゆえ、一辺の長さは

$\boxed{1.414}$ と $\boxed{1.415}$

の間にあるはずです。
このように見て行くと、

ちょうど２になるような小数は

存在$\boxed{\text{しない}}$ように思われる。

面積が、ちょうど

$\boxed{2}$ cm^2 の

１辺の長さは、
小数で表そうとすると、

$\boxed{1.4142\cdots\cdots\cdots\mathrm{cm}}$

とずっと続く数になりそうです。

それで、
面積が、ちょうど

$\boxed{2}$ cm^2 の

１辺の長さを、
ルート２センチメートルと言い、

$\boxed{\sqrt{2}\ \ \mathrm{cm}}$

とあらわすことにしました。
（記号√の説明はここでは省略します。）

式の展開

$$(a+b)^2$$

を理解する基本は「13×13」にあります。
（11×11 は 1×1 が特殊。12×12 は 2 が重なる）

ふつう 13×13 は､次のように計算します。

	1	3
×	1	3
	3	9
1	3	
1	6	9

これを、次のように分解します。
（ホントは、
下の計算を略式化したのが上の計算です）
この分解がにわかに理解できない中学生は
結構います。びっくりします。

	1	3
×	1	3
		9
	3	0
	3	0
1	0	0
1	6	9

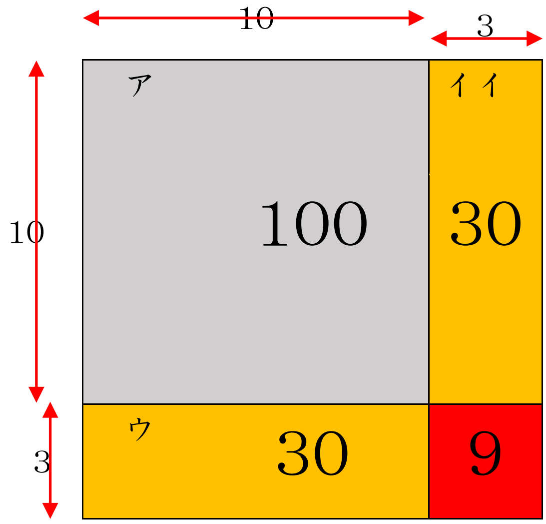
これを更に次のように分解します。

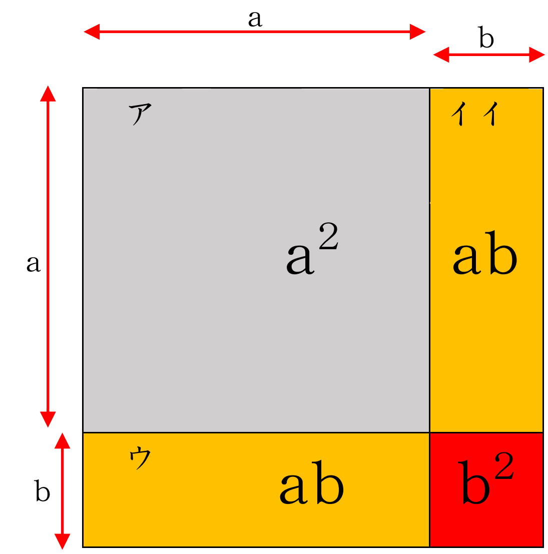
			10	+	3
×)			10	+	3
			30	+	9
	100	+	30		
	100	+	60	+	9
=	169				

上の位からの計算にしてみます。

	10	+	3		
×)	10	+	3		
	100	+	30		
			30	+	9
	100	+	60	+	9
=	169				

図の方も、組み合わせながら進みます。





10 や 3 を、a や b に替えれば
中学三年の文字式の計算になります。
しかも､「この計算方法は高校範囲」
と言えば、なおファイトが湧きます。

	a	+	b		
×)	a	+	b		
	a^2	+	ab		
			ab	+	b^2
	a^2	+	$2ab$	+	b^2

13×13 の次は
14×14、15×15、16×16
といくつかやっていけば、
ほんの少しの文字式の知識とで

$$(a+b)^2$$

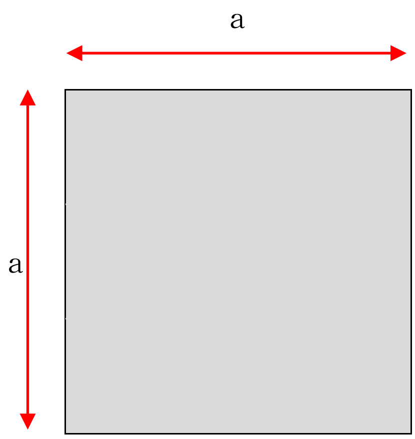
に行きつきます。

小学３年生の知識に
少し文字式の約束ごとを足せば
できあがりです。

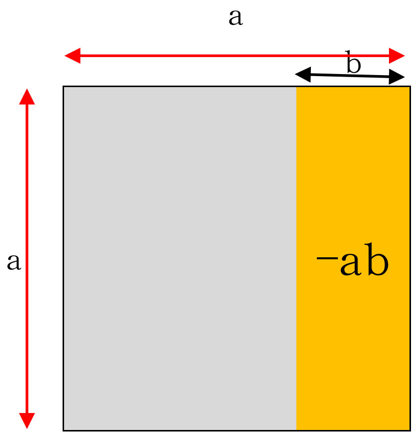
中学３年の式の展開の基本の指導は
意外と短時間でできます。
「中学３年の式の展開が出来た」
と伝えることが出来るのです。
やってみたいと思われませんか。

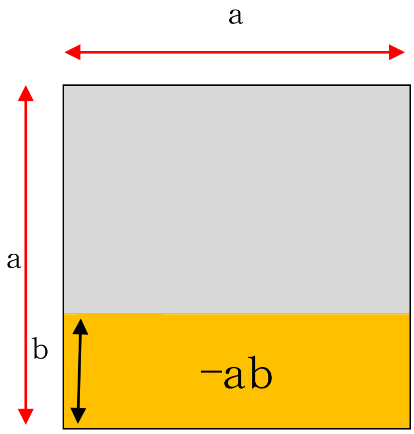
プラスはともかく、

$(a-b)^2$ はどうだろうかと心配になりますが、あまり子どもは戸惑いません。
図解すれば次の通りです。

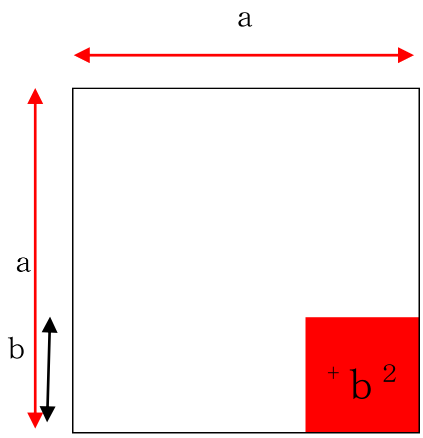


全体が a^2 です。





ab を二つ引きます。
b^2 が二重に引かれます。
引き過ぎですから加えなおします。



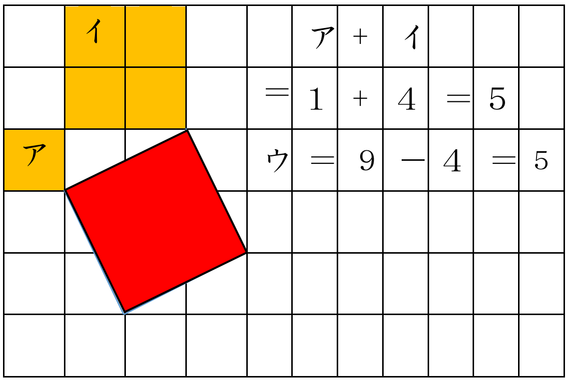
よって、

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

三平方の定理

これは、方眼紙を使って見せれば、
小学２年生がその定理を発見できる話です。

まず、
方眼の数で広さを表すことを理解する。
次に、
下図で言えば、アとイの広さなど、
直角をはさむ二辺の上にたつ正方形の広さを理解する。これはカンタンカンタン。
斜辺の正方形の周囲の直角三角形四つの合計の広さを考える。
そして、斜辺を一辺とする正方形の広さ。

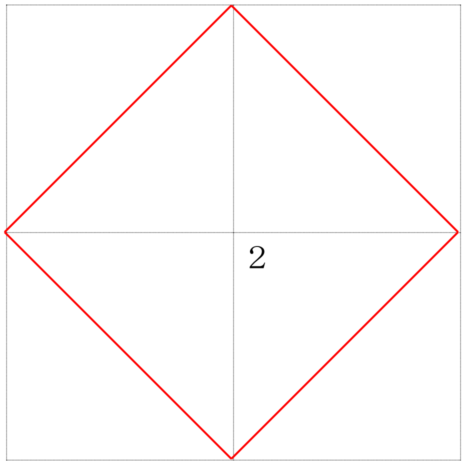


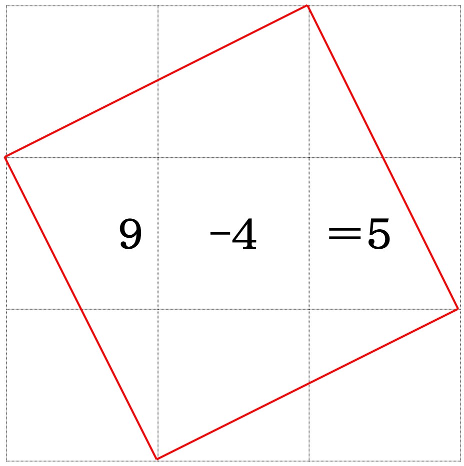
これらに類似の問題を幾つか調べさせれば、
必ず三平方の定理にたどり着きます。
古代にも方眼の石畳を見て
三平方の定理を発見した、と聞きます。
方眼紙は、なかなか有効です。

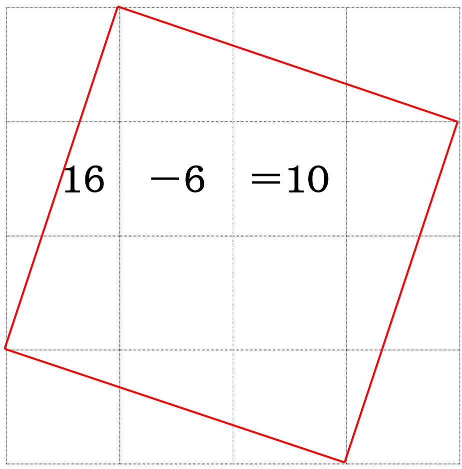
どの単元の学習でも、
あらゆることを
そこで学習しきっておこうと考えると、
いちばん面倒なことが解決できる日まで
待つことになります。
そして、それは、単元のすべてを
一気にすすめることになるので、
カンタンなこともこぼしがちになります。

これも、教材的に説明します。

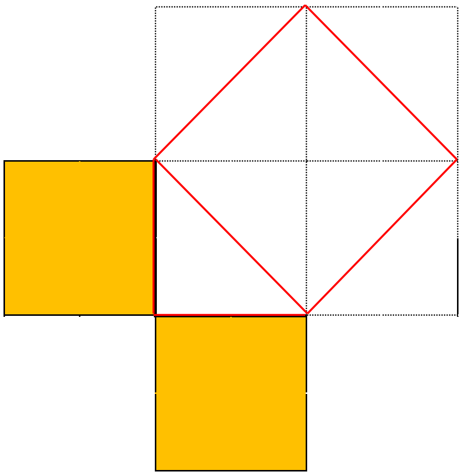
下記の実線の正方形の大きさを
小さい点線の正方形の個数で表せば、
三平方の定理は雑作ありません。

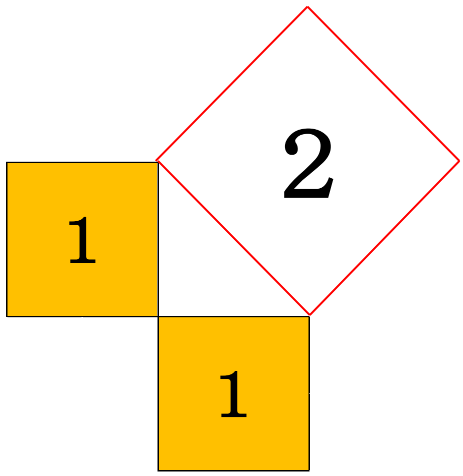


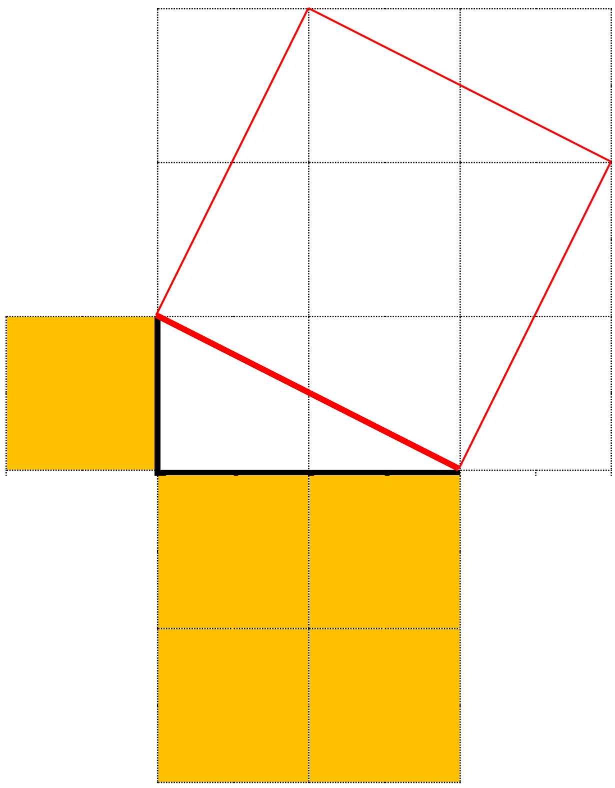


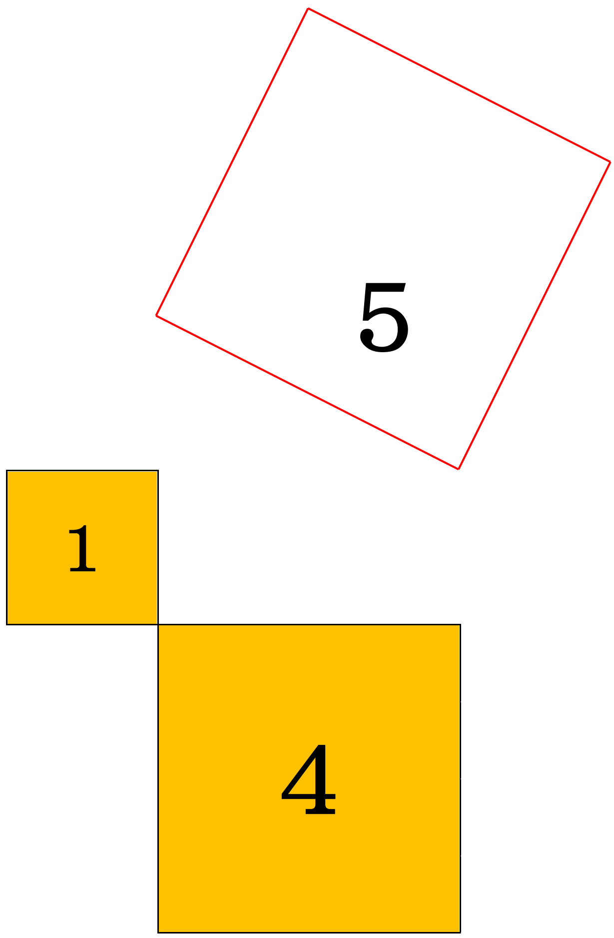


左の図で、方眼の数を数えれば、





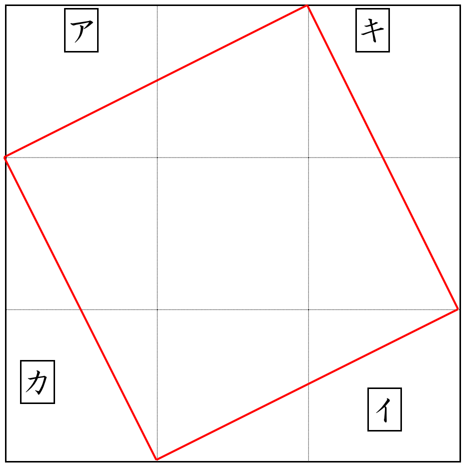




上のとおりです。いくつか実例で示せば、
低学年の児童でも
三平方の定理くらい発見します。

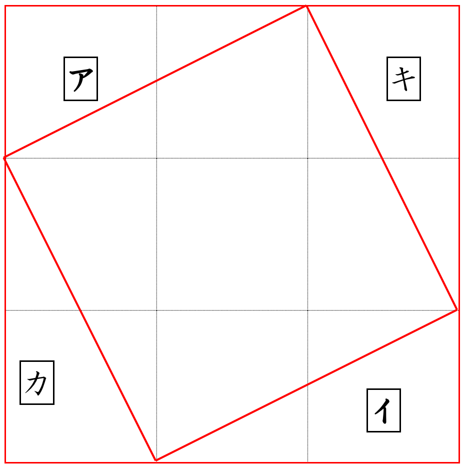
三平方の定理の証明

証明だって、ゆっくり取り組めば
小学低学年に判る証明もあります。

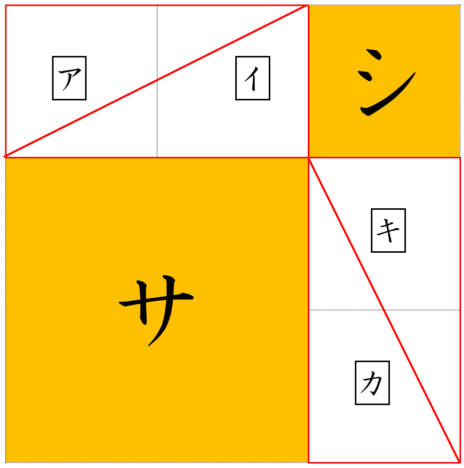


上記の図の中の、
斜めになった**正方形**の面積は？

斜めになった**正方形**の面積は、
大きな正方形から
4つの**直角三角形**
ア、イ、カ、キの
合計面積を引いたものです。



アとイ、カとキを
下記のように集め、
全体の大きい正方形から引けば、



残りの色付けした
2つの正方形の面積の和
になります。

示した図をつかって、直角三角形の
斜辺を一辺とする正方形の面積が
直角をはさむ二辺のそれぞれを一辺とする
正方形の面積の和に等しいこと
の証明文は次の通り。

：見ての通りですが、
① 斜めの正方形が、直角三角形の斜辺
を１辺とする正方形であることの確認。
② ：正方形サとシが、それぞれ
直角三角形の直角をはさむ辺を１辺と
する正方形であることの確認。
③ ：サとシが①の正方形の面積と等しいこ
とを、両方とも外枠の大きな正方形から、
ア、イ、カ、キ
の４つの直角三角形を引いたもの
と確認する。以上です。
小学生でもわかります。

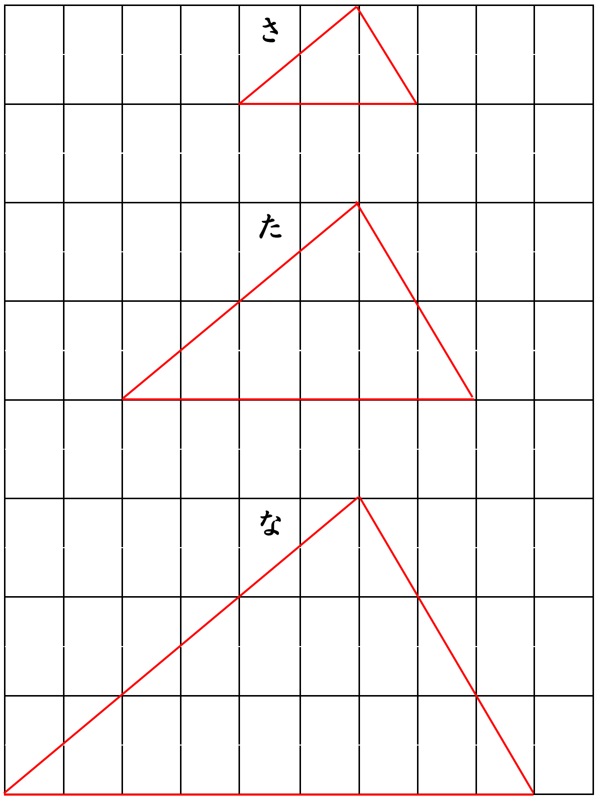
相似は、
中学三年の後の方の単元になっています。
しかし、相似そのものが難しくて
後の単元になった、というより、
証明の方法が中２の合同の後になるので
三年になっただけでしょう。
しかも、図形は関数の後の配置で
更に後ろになりますが、
相似そのものの知識としては
ほとんど小学領域だと思います。

そもそも、
同じ形ということが相似を示しています。
同じ形とする判断は、
乳児でもできています。
母親の顔を遠くからでも識別できるのは、
小さく見えても
同じ形と判断しているからでしょう。
真四角がどれも同じ形と判断することと、
相似の考えと大した違いはありません。

小学校でも、
拡大・縮小として理解しています。
では、何が中学３年の話題なのでしょうか。
三角形の相似条件を使うところぐらいです。
しかし、
図形の相似を、
三角形の相似で話題にすると、
円の相似を表現できません。
円の相似を表現できない相似理論が
完璧な証明理論だとは思えません。
いささか怪しいところです。

ですから、相似の証明も
まあ、そういう約束事として
軽く従うのが良策でしょう。
以下教材風にせつめいします。

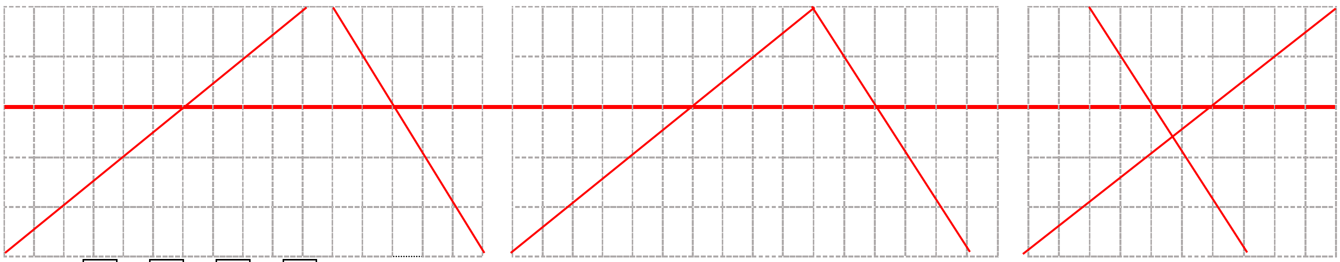
等間隔の平行線が相似の理解に
実に有効です。
次の**三角形は等間隔の平行線**の**交点に頂点**
をおいたものです。



上の三角形について、
対応する辺の長さが**３辺とも**
たがさの**2倍**
　　　になっていることを**確かめなさい**。
また、
対応する辺の長さが**３辺とも**
ながさの**3倍**
　　　になっていることを**確かめなさい**。
また。
たの面積はさの面積の4**倍**であり、
なの面積はさの面積9**倍**である。
このことを、
たや**な**の**図の中に**
平行線を引いて表し、説明しなさい。

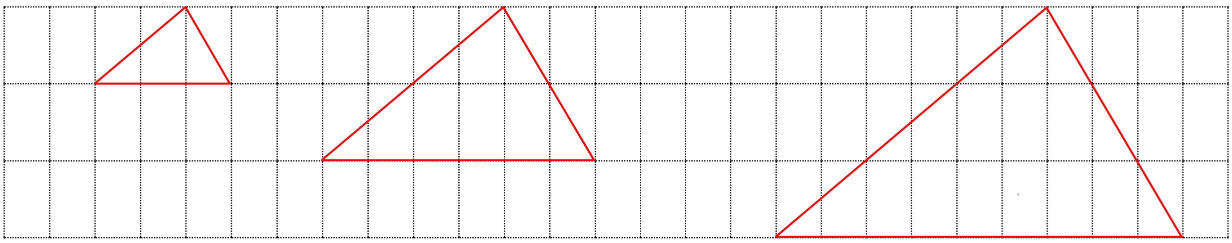
平行線と線分の比

あ　　い　　う

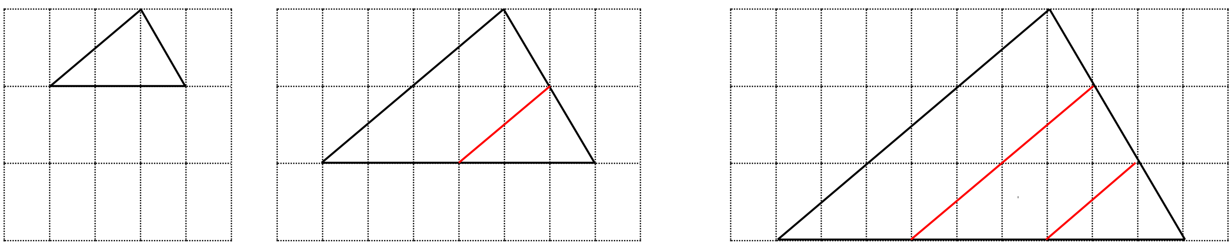


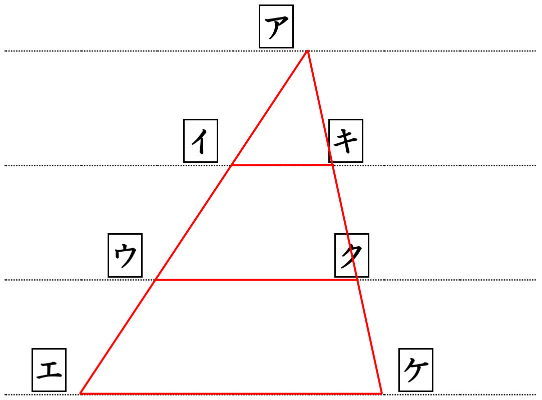
上のあ、い、う、えの**線分**は、
タテ・ヨコともに**等間隔**の**平行線**の**交点**に両端をおいたものです。
斜めの線分はいずれも、
ヨコ**実線**によって、２ ： ３に分けられていることを確認しなさい。

下の三角形は、
いずれも**タテ・ヨコ**ともに**等間隔**の**平行線**の**交点**に**頂点**をおいたものです。
気づくことを言いなさい



下の図形は、上の図形に幾つかの**平行線**を引いたものです。
気づくことを示しなさい





上の三角形は、**等間隔の平行線の上に**
描いたものです。
ア、イ、ウ、エ、キ、ク、ケは
それぞれの三角形の頂点です。

次の式を完成させるには、
前ページの図も参考にすれば簡単ですね。

	アイ	:	イウ	:	ウエ
＝	1	:	1	:	1

	アイ	:	アウ	:	アエ
＝	1	:	2	:	3

	アキ	:	アク	:	アケ
＝	1	:	2	:	3

	イキ	:	ウク	:	エケ
＝	1	:	2	:	3

１の部分を略せば、

	アウ	:	アエ
＝	2	:	3

	アク	:	アケ
＝	2	:	3

	ウク	:	エケ
＝	2	:	3

次の図形の**面積**を
三角形アイキを１として
表しなさい。

三角形アイキ	1
三角形アウク	4
三角形アエケ	9

三角形の大きさがわかれば、

四角形イキクウ	3
四角形イキケエ	8
四角形ウクケエ	5

は簡単に求められます。

小学生でも十分に出来る問題です。

二次方程式の解の公式

$$ax^2+bx+c=0$$

上の式が下の式になる変化を理解すれば良いのですが、
それを子どもたちに理解させるには、
その前に、十分な準備が必要です。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

さすがにこれは小学算数からでは手間がかかりそうです。
しかし、
負の数×負の数が正の数になることと、わずかな文字式の知識があれば挑戦可能です。

ここで強調しておきたいのは、
この公式の導入の理解が生徒にとって時間がかかるからと言って、
「公式を覚えて使いなさい」ということだけはやめてもらいたいということです。
そんな数学の先生が居るのです。いや居たのです。びっくりでしょう。

この公式を理解させることができれば、
数学がわかってきた、という感覚が生まれてきます。
これを、結論だけ覚えて使っていると、
「結局自分は、数学は分からないのだ」という気持ちになるのです。

この公式を導くには、何回か初めからその道筋をたどってもらわねばなりません。
しかし、時間をかける値打ちのある作業です。
そして、手順さえ踏めば、それほど難しい論理はありません。
式の展開をにらみながら逆に辿るだけです。

この公式を学校で学んでいた時代、公式をつかって問題を解くよりも、
「どうしたらこんな公式を見つけることができるのだろうか」、と考えていました。
無謀にも、歴史上の天才と肩をならべようとしていたわけです。教師になってからの結論は、「人が見つけたものを生徒に再発見させることは簡単である」でした。
無謀も、無駄ではなかったわけです。

教材的に表してみます。

1×1 や 2×2 でなく、
3×3 から始めるのが良い。

3×3＝9
(-3)×(-3)＝9 だから、
x^2＝9　ならば、
x＝3　または
x＝-3

4×4＝16
(-4)×(-4)＝16 だから、
x^2＝16　ならば、
x＝4　または
x＝-4

x^2＝25 ならば、
x はいくらでしょうか

3、4 ときたら次は 5 かな。

いくつかの問題で、
表現に慣れていきましょう。

x^2＝1 ならば、
x は、1 または-1
のどちらかです。

これを、

x^2＝1 ならば、
x＝1 または
x＝-1

と表したり、

x^2＝1 ならば、
x＝±1

と表します。
(「プラスマイナスいち」と読む)

x^2＝9 ならば、
x はいくらでしょうか

既に左で見ていますが、
その探し方です。

1 から順に調べていきます
x＝1 ならば x^2＝1　ダメ
x＝2 ならば x^2＝4　ダメ
x＝3 ならば x^2＝9　OK
よって、
x＝±3

わかったら、次の問題です。

x の値を求めなさい。
x^2＝16
x^2＝25
x^2＝36

半分知っているような数字、
簡単な問題で、
表現方法に慣れていきます。
表現方法に慣れることは
非常に大切です。

一度に、
数字もややこしい問題に
取り組ませないこと、
これが数学指導のコツです。

x^2＝4　ならば　x＝±2

上の問題を参考にして
次の問題を考えなさい。

x^2－4＝0　ならば
x はいくらか。

ひとつめの問題で答えられ
る必要はありません。
一年生で学んだ等式の性質
「両辺に 4 を足して x^2＝4」
を見せれば良いだけです。

幾つの例を見せる必要があ
るかは子ども次第です。
でも、
いつまでも続ける必要があ
った子はいませんでした。

x^2＝9 ならば、
x＝±3

でした。

では、

（x+1）^{2}＝9 ならば、
x+1 はいくらでしょう

この形の問題でも
初めから答えられる必要は
ありません。
幾つか答えて見せれば
そのうちに、
「言わないで」となります。

$(x+1)^2=9$ ならば、 $x+1=\pm3$

にこぎつけたら
後は、中学一年の
一次方程式です。
両辺から１を引いて
$x=-1\pm3$

子どもはふつう
$x=\pm1-1$　とします。
これでも構わないわけですが、
ここは習慣に従い
$x=-1\pm3$
としてもらいましょう。

$(x+1)^2=1$ ならば、 $x+1=\pm1$ **$x=-1\pm1$** $x=0$ または -2

$(x+1)^2=4$ ならば、 $x+1=\pm2$ **$x=-1\pm2$** $x=1$ または -3

数字をややこしくして
「考えさせる」必要はありません。

表現方法に慣れさせることが大切です。

次のテーマです。

$(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(x+2)^2=x^2+4x+4$

$(x+3)^2=x^2+6x+9$

$(x+4)^2=x^2+8x+16$

赤い数字の関係を見つけてもらいます。

次に、逆向きの練習です。

$(x+1)^2$	$=x^2+2x+1$

ならば、

x^2+2x+1	$=(x+1)^2$

答えの分かっている問題での練習が大事です。

$(x+2)^2$	$=x^2+4x+4$

ならば、

x^2+4x+4	$=(x+2)^2$

$(x+3)^2$	$=x^2+6x+9$

ならば、

x^2+6x+9	$=(x+3)^2$

次に、

x^2+2x+1	$=(x+1)^2$

両辺から１を引いて

x^2+2x	$=(x+1)^2-1$

同じように、

x^2+4x+4	$=(x+2)^2$

両辺から４を引いて

x^2+4x	$=(x+2)^2-4$

x^2+6x+9	$=(x+3)^2$

x^2+6x	$=(x+2)^2-4$

少しずつ説明の言葉を少なくしていきます。

$x^2+8x+16$	$=(x+4)^2$

だから、

x^2+8x	$=(x+2)^2-4$

x^2+4x	$=(x+2)^2-4$
x^2+6x	$=(x+3)^2-9$
x^2+8x	$=(x+4)^2-16$

次に、
もう一度ヒント無しで。

x^2+4x	$=(x+2)^2-4$
x^2+6x	$=(x+3)^2-9$
x^2+8x	$=(x+4)^2-16$

ステップの数はかなりになりますが、
特に難しいことはありません。

幾つの類題をやるか、だけです。
それは、子どもによって違います。

早くに始めて、
何度でも初めから挑戦することが大切です。

時間をかける値打ちがあります。
この一つの公式を手に入れる道の中で
身につけられる考え方は沢山あります。
公式を覚えて使うだけでは手に入らない
大切なものがたくさん身につきます。

さあ、次に進んでみましょう。

x^2+2x	$=(x+1)^2-1$

だから、

x^2+2x	$=3$

ならば、

上の式の右辺と下の式の右辺を等号で結び、

$(x+1)^2-1$	$=3$

両辺に1を加え、

$(x+1)^2$	$=4$

ここまでくれば、来た道です。
いくつか練習しましょう。

右辺の数だけを変えてみましょう。

x^2+2x	$=(x+1)^2-1$

だから、

x^2+2x	$=8$

ならば、

$(x+1)^2-1$	$=8$

$(x+1)^2$	$=9$

x^2+2x	$=15$

x^2+2x	$=24$

上の方程式の左辺のxの係数を
偶数のまま4、6、8などに換え、
それに合わせて右辺の数値を決めれば、
簡単な練習問題ができます。

x^2+4x	$=5^2$

ちょっと負の数も使いましょうか。

x^2+4x	$=-3$

いくつの類題をすれば自分で答えられるように
なるかは子ども次第ですが、
問題の作り方は、
分かり易い形から入ります。

$$(x+1)^2 = 4$$
$$x^2+2x+1 = 4$$
$$x^2+2x = 3$$
$$x^2+2x-3 = 0$$

一番下の式が問題です。

答えに平方根が入る問題は、
如何にも難しそうに見えますが
平方根のところが判っている子どもは
難なくクリアします。

$$(x+1)^2 = 2$$
$$x^2+2x+1 = 2$$
$$x^2+2x = 1$$
$$x^2+2x-1 = 0$$

文字式化します。
数字で十分な練習をすれば、
文字式への一般化が楽になります。

一般式・文字式で判って、
それを実際の数に当てはめる演習の
数学の学習の仕方は、
先ず第一に、
判りにくいし、
さらに、
発見の喜びが薄くなります。
実際の数字でわかってから
文字式に進みましょう。

$$x^2+2mx=0$$
$$(x+m)^2-m^2=0$$
$$(x+m)^2=m^2$$

$$x^2+2px=0$$
$$(x+p)^2-p^2=0$$
$$(x+p)^2=p^2$$

一つの例で判るのは怪しい
くらいに思った方が良いでしょう。

$$x^2+2mx+n=0$$
$$(x+m)^2=m^2-n$$

$$x^2+2px+q=0$$
$$(x+p)^2=p^2-q$$

ここから分数になります。
小学領域の分数に不慣れな生徒は
ここでつまずきます。
分数はしっかりやっておきましょう。

$$x^2+mx=0$$
$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2=0$$
$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

少しずつ進めます。

$$x^2+bx=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$$

$$x^2+bx+c=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=-c$$
$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-\frac{4c}{4}$$

ゴールも間近です。

難しそうなところは
字を大きくするのが
コツです。

● $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

● $(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}$

● $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$

● $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

● $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

● $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

● $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

あとは、
次の式をａでわれば左の式になります。

$$ax^2+bx+c = 0$$

小学校の分数計算、
一年生の　文字式の表し方＆等式の性質、
三年生の　式の展開と平方完成、
　　　　　平方根、
分数計算の文字式化、
いろんな技を使いますから、
これ一つの公式を作れるようにすれば、
数学が身についてくる、というものです。
一年生で挑戦するときは、
半年くらいかけてやっては如何でしょうか。

ついでですが、
高校の数学Ⅰで学ぶ二次関数の
次の式との違いが判れば
高校数学も怖くなくなります。

上の式の変化を自力で表せるようになれば
次の変化は楽です。**よく似ていますね。**

$$y=ax^2+bx+c$$

ならば

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

二つを同時に学べば、
「等式の変化」と「式の変形」との違いも
身につきます。