数の拡張の歴史

数の最初の発明が
どのような形で始まったか分かりませんが、
できあがった形は、

まず[１]があって
その[１]に[順に１ずつ加わって]
数が出来ています。

１、1＋１，２＋１、 ３＋１、 ４＋１、５＋１
１、 ２、 ３、 ４、 ５、 ６

これは、
[自然にできた]という意味でしょうか？
[自然な感じがする]という意味でしょうか？

[**自然数**]と名づけられています。

数学ではこのように言っているのですが……

【自然数と自然数】との

【たし算の結果】は、

【いつも自然数の中】にあります。

【自然数と自然数】との

【かけ算の結果】は、

【いつも自然数の中】にあります。

数学的には、このことを、

【自然数】は、
【自然数の範囲内】で、
【たし算とかけ算がいつも可能である】

と言ったりします。

数の拡張の歴史

【わり算】をしようとすると、
【6÷２】は
【自然数の中】に【答え】がありますが、

【1÷３】など、
すぐに　【自然数の中】では、
答えが求められなくなります。

そこで、かなり古い時代に

【分数】が考え出されました。

$$1 \div 3 = \frac{1}{3}$$

$$2 \div 3 = \frac{2}{3}$$ などです。

【自然数】は、
【自然数の中】だけで、
【たし算】、【かけ算】の[答え】が
いつもあります。

【ひき算】は、
【大きい数】から【小さい数】を引くと
【自然数の中】に【答え】があります。

しかし
【同じ大きさの数】を引くと

【自然数の中】に【答え】が

ありません。

そこで
【０】が発明されました。

また、
【小さい数】から、
【大きい数】を引くことを考えました。

【５個】あるとき、
【３個】必要だとすれば、
【５－３】=【２】個残るはずです

【５個】あるとき、
【７個】必要だとすれば、
【５－７】で
【２】個不足です。

何とか、
この【２個不足の状態】を表そうと
人々は考え、

【２】に
【－】=【マイナス】という符号を
つけて
【－２】と
表してみることになりました。

小学校では、

自然数と０とを合わせて、

整数と呼んでいましたが、

中学以降

整数と言えば、

自然数にマイナス符号をつけた数も

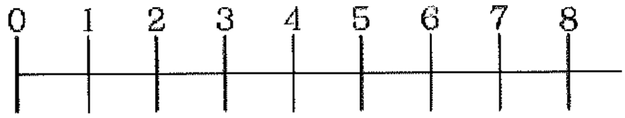
含むことになっています。

数直線

直線上に数を表します。

【０の点＝原点】の右に、

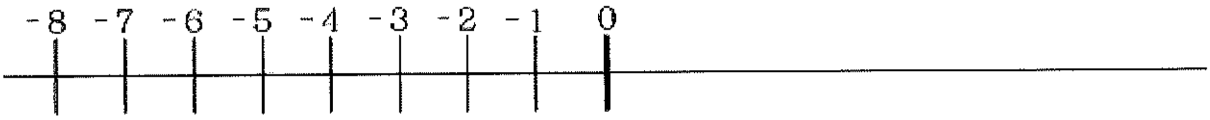
自然数を目盛り、



次に

【０の点＝原点】の左に

同じ大きさで目盛ります。



【マイナスの数】と区別するために

元の自然数に

【＋】（プラス）の【符号】をつける

ことがあります。

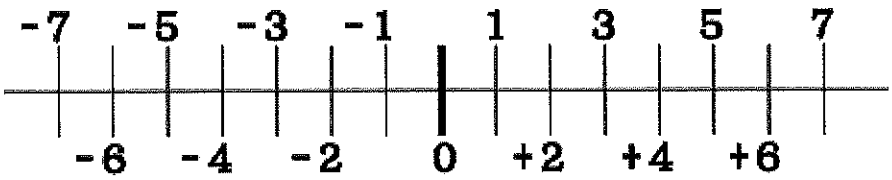
【＋（プラス）の符号】は

あっても無くても

意味は変わりません。

【0】は
【正の数】にも【負の数】にも
【いれません】。
それゆえ、符号はつけません。

数（すう）を目盛ったこの直線を
数直線と言います。



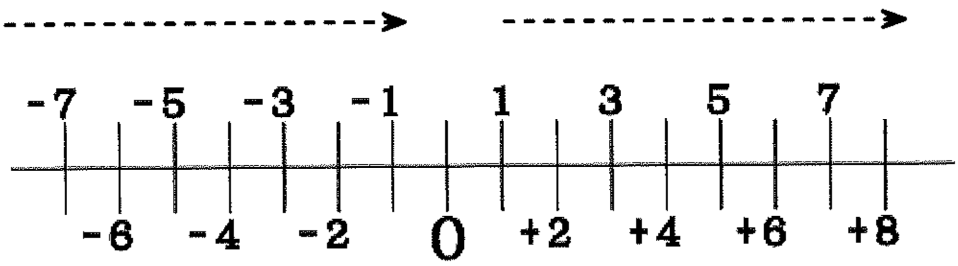
【プラスの符号】【＋】を【正の符号】
【マイナスの符号】【－】を【負の符号】
と言います。

これからは、
整数であれ小数であれ、分数であれ
正の数だけでなく、
負の数も考えに入れることになります。

数の方向

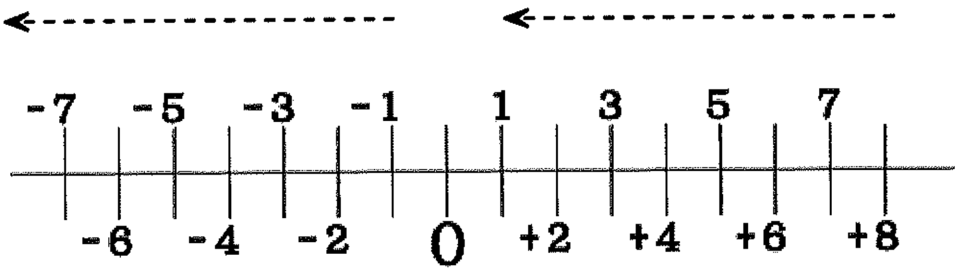
【右向きの方向】を、

【正の方向】と名づけます。



【左向きの方向】を、

【負の方向】と名づけます。



【方向】について
【右向き】を【＋】で表し、
【左向き】を【－】で表してます。

【スタート】の場所は問題ではありません。

【3の地点】から【右へ５】なら、
【３】＋【５】であり、

【3の地点】から【左へ５】なら、
【３】－【５】というわけです。

もちろん
０の地点から右へ５ならば
０　＋　【５】

０の地点から左へ５ならば
０　－　【５】です。

【正の数、負の数】の【大小】

【大きい】【小さい】という【言葉の定義】。

小学校で学んだ数は、
【数直線上】の【右】にある方が
【大きい】ということでした。

同じように、
【負の数】まで拡張された
【数直線上の数】において、

【正の数・負の数　両方とも】、
これまで通り、

【右にある数】は【左にある数】より【大きい】

ということにします。

もちろん逆に、
【正の数】も【負の数】も、

【左にある数】は【右にある数】より【小さい】

と言うことになります。

【参考】【不等号】

【a】が【bより大きい】ことを
【$a>b$】と表します。または【$b<a$】

符号が開いている方にあるものが
【より大きい】約束です。
読み方は
【a大なりb】で、
【aが大である、bに比べて】
の意味です。

【a】が【bより小さい】ことを
【$a<b$】と表します。または【$b>a$】

符号が閉じている方にあるものが
【より小さい】約束です。
読み方は
【a小なりb】で、
【aが小である、bに比べて】
の意味です。

これらの式で、
【＞】、【＜】などの記号を
【不等号】と言います。

【絶対値】ゼッタイチ

正の数、負の数から
【+、−の符号】を
【取り去って】得られる数を、
その数の【絶対値】という

【0の絶対値】は【0】とする　※

突然こういう言い方をされると
どういう意味があるのか
と思われるものです。

初め
所持金5円も借金5円も
単に5円とだけを考えていた時代から、
【所持金5円】を【プラス5円】
【借金5円】を【マイナス5円】
と考えるようになったあと、
でもやっぱり5円は5円と考えるように、

【右へ3進むこと】を【プラス3】
【左へ3進むこと】を【マイナス3】
と表すことにするなどの考えを導入
しても、
【右へ進もうが左へ進もうが
　3には変わりがないじゃあないか】
といった考え方が生まれてきます。

つまりは、一度は
【違いを考えた数】に対して
【違いを統一した考え】が必要になってきます。

一度違いを考えると、
それらを統一する考えを表すのに
もとのままの表現では満足できません。
新たな方法を考えだすことになります。

それが、
プラスでもマイナスでも
大きさそのものをとらえる
絶対値の考え方です。

【絶対値】と言う考え方が手に入ったので
【数の大小】を
【絶対値】を使って
次のように言い表すことができます。

【正の数】は
【０より大きく】、
【正の数】どうしでは
【絶対値】が大きいほど大きく、
【絶対値】が小さいほど小さい。
（今まで通りだから特に問題はない。）

【負の数】は
【０】より【小さく】、
【負の数】どうしでは
【絶対値】が大きいほど小さい。
【絶対値】が小さいほど大きい。

（負の数の大小は、間違う人が多い。
特に、小数で、０付近でよく間違う。）

－３００万と－０．００３とでは
－３００万の方がずっと大きいように思いますが、
－０．００３の方が非常に大きいと言うことになるのです。

－３００万は
０．００３よりずっとずっと小さいと考えるのが数学です。

【＋５】を【－５】になおすこと、
【－５】を【＋５】になおすことなど

【数】はそのままにして、
【ついている符号】を
【もう一方の符号】にすることを
【**符号を変える**】
と言います。

【数直線上】では、
【原点】を【中心】として、
【対称の位置】にあります。

第3節　正の数・負の数の利用

【正の数・負の数】は、互いに
【反対の性質】
を表すのに用いられます。

【東へ５m】を【＋５m】と表せば、
【西へ５m】は【－５m】と表せる。

上へ５mを【＋５m】と表せば、
下へ５mは【－５m】と表せる。

右へ５mを【＋５m】と表せば、
左へ５mは【－５m】と表せる。

０度より２目盛り上の温度を【＋2°C】で表せば、
０度より２目盛り下の温度を【－2°C】で表せる、

貯金額1億円を【＋１億円】で表せば、
借金額1億円を【－１億円】で表せる。

もちろん
【西へ５m】を【－５m】と表せば
【東へ５m】は【－５m】と表すことになる。

地図上では、
ふつう【北を上】に表すので、
【右側】が【東】
【左側】が【西】となるので、
【東へ５m】を【＋５m】と
表すのが適当でしょう。

もし
【南を上】に表すと、
【右側】が【西】、
【左側】が【東】となるので、
【東へ５m】を【５m】と
表すのが適当になりますが、
余計なことは、考えるのをやめて
おきましょうか。

右へ５進むことを【＋５】と表せば、
左へ５進むことを【－５】と表せる。

【右へ進むこと】を【＋】と表せば、
【左へ進むこと】を【－】と表せる。、

【増加すること】を【＋】と表せば、
【減少すること】を【－】と表せる。

つまり
【＋５　プラス５】とは、
【０から右の方へ５だけ進んだ位置】

という意味だけではなく、
【右へ５進む】とも考えられる　。

これは、
【＋５　プラス５】を、
小学校で学んだ
【足す５】と
読むのと同じ働きということになる。

次第に、
正負の数の計算練習が進んでくると、
【位置としてのプラス５】か
加える作業としての【足す５】か
意識がぼやけてきます。
しかし、
あまり支障は無いようです。

このように
数直線上の【位置】だけの【正負】
ではなく、
【**動き**】として、
正負の考え方を発展させることもできる。

【加法の規則】

２数の和

【同符号の２数の和】

（＋３）＋（＋４）
＝＋（３＋４）

（－３）＋（－４）
＝－（３＋４）

【絶対値の和】に
【共通の符号】を付ける

（＋A）＋（＋B）
＝＋（A＋B）

（－A）＋（－B）
＝－（A＋B）

【異符号の２数の和】

次の2つの作業を行う

$\boxed{1}$【絶対値】の【大きい方の符号】をつける

$\boxed{2}$【絶対値】の【大きい方から小さい方を引く】

（＋５）＋（－３）

絶対値の大きい方の符号(＋)

絶対値の大きい方から

絶対値の小さい方を引く

＋(５－３)＝２

（＋５）＋（－７）

絶対値の大きい方の符号(－)

絶対値の大きい方から

絶対値の小さい方を引く

－(７－５)＝－２

２数の差＝減法の規則

たとえば、

５－３は　　５＋（－３）に、

３－５は、　３＋（－５）に

書き換えることができます。

このように、

【ひく数（減法）】の
【符号】を【変え】て
【加える】ことにより、
【減法】の式も
【加法だけの式】
に表すことができます。

このことにより、
【減法】を無くし、
【加法だけ】で
演算することが出来るようになりました。

もちろん、
加法だけの式といっても、
形の上ではそうですが、
実際上は、ひき算をします。

ひき算は
【交換法則】が成り立ちません。
しかし
【減法】を【加法】なおすことにより、
交換法則が使えます。

たとえば

３－５を

３＋（－５）と

加法の形に書き換える
ことにより

（－５）＋（３）

のように、

交換法則を用いて(＋)の
前後を入れ替えることが
できます。

【加法だけの式】
に表したときの
【＋】で結ばれた
【それぞれの数や文字】を
【項】と言います。

例えば

１－２＋３＋４－７＋９

（＋１）＋（－２）＋（＋３）＋（＋４）＋（－７）＋（＋９）のように

【加法だけの式】にしたとき、

【項】コウは　順に

【＋１】、【－２】、【＋３】、
【＋４】、【－７】、【＋９】です。

なぜ、
【和の式になおしたとき】で、
【和や差の式になおしたとき】
ではないのか、
と考える人がいると思います。

そう考えた人は
非常に注意深い人です。
なぜ【差の式】になったときをふくめず、
【和の式だけ】なのか

かんたんに結論だけを言うと、
【項】が
【正の数】か【負の数】かを
いつも、
【１つ】に
はっきりと【決まる】ように
するためです。

【文字式・方程式】を
学んだらもっとはっきりします。

【和】の形にしたときの
【それぞれの数】が【項】と
言うのだと
はっきり思い描いておいてください。

【３】加法と減法の混合計算

【ひく数】の【符号】を【変え】て
すべて【加法だけ】の式になおし、

【正の数】どうし【負の数】どうしを
まとめて計算する。

まとめれば、
結果は【２つの数の和】の計算になります。

例えば、

$1-2+3+4-7+9$ を

$(+1)+(-2)+(+3)+(+4)+(-7)+(+9)$

のように変え、

【＋】は【＋】だけで集めて計算し、

$(+1)+(+3)+(+4)+(+9)=$【＋１５】

【－】は【－】だけで集め、

$(-2)+(-7)=$【－９】

最後に、正の数と負の数のたし算を行います。

【＋１５】＋【－９】＝【＋６】

【マイナス符号のついた数】の始まりは、
【ひき算】からでしょうが、
一度できてしまうと
【かけ算】・【わり算】も
なんとかならないか、
とかんがえるようになりました

【異符号】の
【２数の積】

【異符号の数の積】は
【絶対値の積】 に
【－マイナスの符号】 を付ける。

$(+5) \times (-3) = -5 \times 3 = -15$

$(-5) \times (+3) = -5 \times 3 = -15$

$$(-2)^2 = 2^2 = 4$$

$$(-2)^4 = 2^4 = 16$$

$$(-2)^6 = 2^6 = 64$$

$$(-2)^8 = 2^8 = 256$$

$$(-2)^3 = -2^3 = -8$$

$$(-2)^5 = -2^5 = -32$$

$$(-2)^7 = -2^7 = -128$$

$$(-2)^9 = -2^9 = -512$$

【除法の規則】

【逆数】とは、

2つの数A、B間に

A×B＝1

の関係があるとき、

AはBの逆数である、
BはAの逆数である、という

のでした。

そして、

【わり算】＝【除法】は

【逆数を掛ける計算になおすことができる】

のでした。

$2 \times \frac{1}{2} = 1$　　2 の逆数は $\frac{1}{2}$

$3 \times \frac{1}{3} = 1$　　3 の逆数は $\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$　　$\frac{2}{3}$ の逆数は $\frac{3}{2}$

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$　　$\frac{4}{5}$ は $\frac{5}{4}$ の逆数

$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1$　　$\frac{5}{4}$ は $\frac{4}{5}$ の逆数

【同符号の2数の商】

絶対値の商に

(＋)プラスの符号を付ける

【異符号の2数の商】

絶対値の商に

(－)マイナスの符号を付ける

原則として、
【乗法の規則】と変わりはない。

【０】との【乗除】

$0 \times a = 0$

$a \times 0 = 0$

$0 \div a = 0 \quad (a \neq 0)$

上の場合のaが
正の数であっても
負の数であっても　同じことが言える。

$0 \times (-3) = 0$

$(-5) \times 0 = 0$

$0 \div (-7) = 0$

【計算の約束ごと】

【乗法と除法】は、
【加法と減法】より【先】にする。

【（かっこ）】があれば、
【（　　　）の中から先】に計算する。

計算の基本法則

【交換法則】

【加法】$a+b=b+a$

【乗法】$a\times b=b\times a$

【結合法則】

【加法】$(a+b)+c=a+(b+c)$

【乗法】$(a\times b)\times c=a\times(b\times a)$

【分配法則】

（　）の中の計算を先にしない例

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

【負の数】のはいった式の計算でも、
【四則計算の約束】は成り立つ。