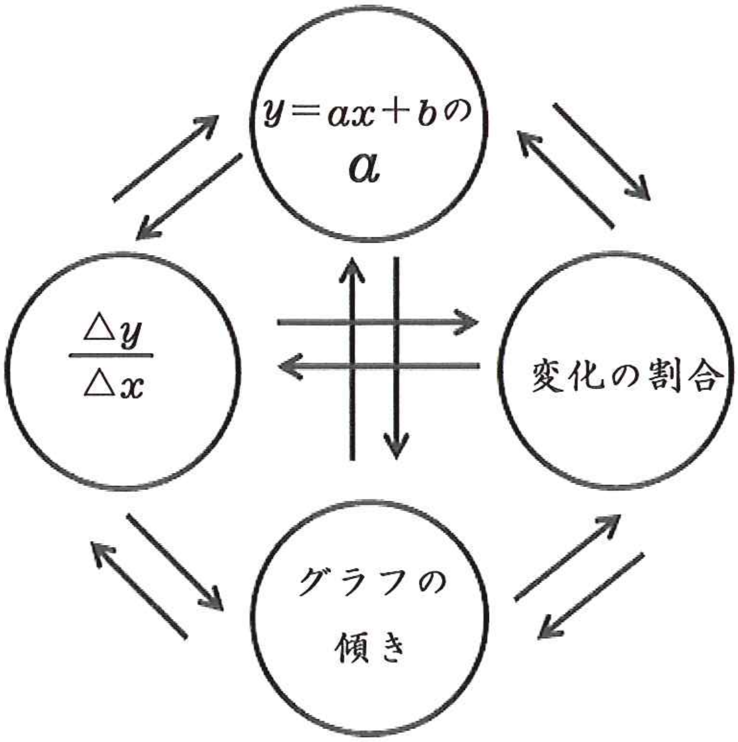
次のことは、この編を学び終わって分かることであるが、
予告編としてアタマに置いてほしい。

中２の関数編（1次関数）で

最も重要なはたらきをするのが

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}\text{である。}$$

これは　変化の割合と命名されて、
ひんぱんに使われるので、しっかりとつかんでほしい。



$y = ax$における（ただしaは定数）

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

について考える。

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ と表すことにする。

$y = ax$における$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ （$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ ）

と読んでください。

① $y = mx$

② $y = \dfrac{n}{m}x$

③ $y = -mx$

④ $y = -\dfrac{n}{m}x$ （$m > 0$、$n > 0$）

正比例の式

$$y = ax$$

の等号の左と右を入れ替えて

$ax = y$ と見る。

aにいろいろの数を入れてみる。

$$2x = y$$
$$3x = y$$
$$4x = y$$
$$5x = y$$
$$6x = y$$
$$7x = y$$
$$8x = y$$
$$9x = y$$

と　考えていくと　昔学んだことが
思い出されないか。

そう
九九！

$2x = y$は

2の段の九九と

みることができる。

xのところに

1、2、……の

かける数を入れみる。

$2 \times 1 = 2$

$2 \times 2 = 4$

$2 \times 3 = 6$

$2 \times 4 = 8$

$2 \times 5 = 10$

$2 \times 6 = 12$

$2 \times 7 = 14$

$2 \times 8 = 16$

$2 \times 9 = 18$

↑ かける数が1増えると　↑ 積は2増える

$2x$のxが1増えると

yは2増える。

$5x = y$は

5の段の九九とみて

xのところに1、2…の

かける数を入れてみる。

$5 \times 1 = 5$

$5 \times 2 = 10$

$5 \times 3 = 15$

$5 \times 4 = 20$

↑ かける数が1増えると　↑ 積は5ずつ増える

$5x$のxが1ずつ増えると

yは2ずつ増える。

① $2x=y$ のとき

② xの値が1増えると

	x	$f(x)$ 2×	y	
	5	2×5	10	
	⋮		⋮	
	3	2×3	6	
コ	2	2×2	4	ソ 2
ケ	1	2×1	2	セ 2
ク	0	2×0	0	ス 2
キ	−1	2×(−1)	−2	シ 2
カ	−2	2×(−2)	−4	サ 2
	−3	2×(−3)	−6	
	⋮		⋮	
	−5	2×(−5)	−10	

③ yの値は※(2)増える

※ この値は ①の

xの係数に等しい。

① $3x = y$ のとき

x	$f(x)$ $3\times x$	y
5	3×5	15
⋮		⋮
3	3×3	9
2	3×2	6
1	3×1	3
0	3×0	0
−1	3×(−1)	−3
−2	3×(−2)	−6
−3	3×(−3)	−9
⋮		⋮
−5	3×(−5)	−15

カ キ ク ケ コ

サ シ ス セ ソ

② xの値が1増えると

③ yの値は※(3)増える

※ この値は ①の

xの係数に等しい。

$2x = y$のとき、
xの値を
小数も含めて考えると。

$2 \times 1.5 = 3$

$2 \times 2.5 = 5$

$2 \times 3.5 = 7$

xの値が 1増えると　yは 2増える

$4x = y$ ならば

$4 \times 1.5 = 6$

$4 \times 2.5 = 10$

$4 \times 3.5 = 14$

$4 \times 4.5 = 18$

xの値が 1増えると　yは 4増える

$10x = y$ ならば

$10 \times 1.2 = 12$

$10 \times 2.2 = 22$

$10 \times 3.2 = 32$

xの値が 1増えると　yは 10増える

かける数の
増える量が1であれば
かける数が、
小数になっても

かけられる数

だけ

増える

$ax = y$ ならば

$a \times 1.4 = 1.4a$

$a \times 2.4 = 2.4a$

$a \times 3.4 = 3.4a$

xの値が 1増えると　yは a増える

もう少し文字式で確かめてみよう。

xの値がx_1（エックスイチ）から
x_1＋１に１増えると
yの値は２増える

$2x=y$ のとき　$2\times x_1 = 2x_1$
$2\times(x_1+1) = 2x_1+2$

$3x=y$ のとき　$3\times x_1 = 3x_1$
$3\times(x_1+1) = 3x_1+3$

$4x=y$ のとき　$4\times x_1 = 4x_1$
$4\times(x_1+1) = 4x_1+4$

$5x=y$ のとき　$5\times x_1 = 5x_1$
$5\times(x_1+1) = 5x_1+5$

同様に

$ax=y$ のとき　$a\times x_1 = ax_1$
$a\times(x_1+1) = ax_1+a$

xの値が１増えると
yの値は　xの係数だけ増えると確認できる。

$y = ax$の

aの値が

分数であれば

xの値が１増えると

yの値はどれだけ増えるのか

調べてみよう

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x}$$

のとき

① $\frac{1}{2} \times x = y$

x	$\frac{1}{2} \times x$	y
10	$\frac{1}{2} \times 10$	5
⋮		⋮
3	$\frac{1}{2} \times 3$	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{1}{2} \times 2$	1
1	$\frac{1}{2} \times 1$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2} \times 0$	0

② xの値が1増えると

③ yの値は$\left(\frac{1}{2}\right)$増える

④ この値は ① の（xの係数）に等しい。

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x}$$

のとき

① $\frac{1}{3}\times x=y$

x	$\frac{1}{3}\times x$	y
10	$\frac{1}{3}\times 10$	$\frac{10}{3}$
⋮		⋮
3	$\frac{1}{3}\times 3$	1
2	$\frac{1}{3}\times 2$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{3}\times 1$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}\times 0$	0

② xの値が1増えると

③ yの値は$\left(\frac{1}{3}\right)$増える

④ この値は①の

（xの係数）

に等しい。

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x}$$

のとき

① $\frac{2}{3} \times x = y$

x	$\frac{2}{3} \times x$	y
10	$\frac{2}{3} \times 10$	$\frac{20}{3}$
⋮		⋮
3	$\frac{2}{3} \times 3$	$\frac{6}{3}=2$
2	$\frac{2}{3} \times 2$	$\frac{4}{3}$
1	$\frac{2}{3} \times 1$	$\frac{2}{3}$
0	$\frac{2}{3} \times 0$	0

1　1　1

$\frac{2}{3}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{2}{3}$

② xの値が1増えると

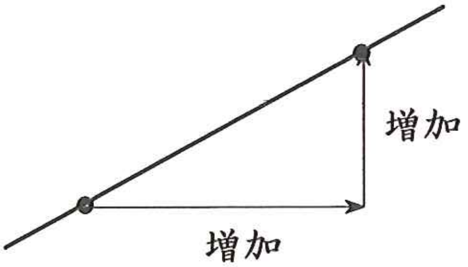
③ yの値は$\left(\frac{2}{3}\right)$増える

④ この値は ① の

（xの係数）

に等しい。

中学1年では、正比例の学習において



イ、

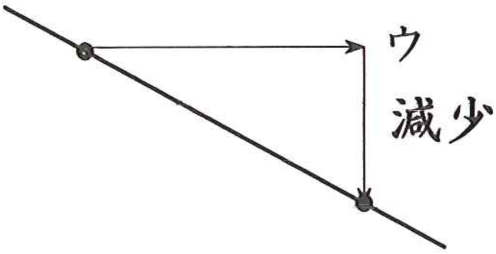
y 軸の上向きの量を

増加 と言い

ア、

x 軸の右向きの量を

増加 と言い



y 軸の

下向きの量を

減少

と呼んでいた。

これに対し、中学2年

1次関数の学習では、

減少もふくめて

増加量 と言う。この増加量は

負の数 で表された場合

減少 ということにはなる。

ふつう

xの増加量を

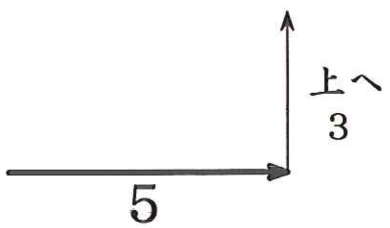
プラス の形にとり

yの増加量を

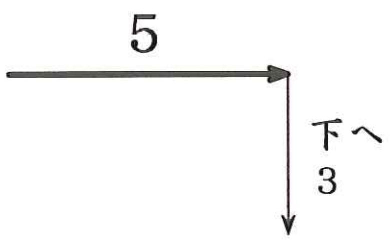
プラス、または

マイナス とする

たとえば



$$\frac{3}{5}$$



$$\frac{\boxed{-3}}{5} = -\frac{3}{5}$$

などのように表す。

$a < 0$ のときの

$y = ax$ における

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

xの係数が　負の場合も考えてみよう。

①

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x}$$

のとき

②

xの値が1増えると

x		y
10		−5
⋮		⋮
3		$-\frac{3}{2}$
2		−1
1		$-\frac{1}{2}$
0		0

$-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$

③

yの値は

$\left(-\frac{1}{2}\right)$

増える

④

この値は ① の

（xの係数）

に等しい。

① $\boxed{y = -\frac{1}{3}x}$ のとき

② x の値が1増えると

x		y
10		$-\frac{10}{3}$
⋮		⋮
3		-1
2		$-\frac{2}{3}$
1		$-\frac{1}{3}$
0		0

$-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$

③ y の値は $(-\frac{1}{3})$ 増える

④ この値は ①の（xの係数）に等しい。

①

$$\boxed{y = -ax}$$

のとき

② xの値が1増えると

x	$-a \times x$	y
10		
⋮		⋮
3		$-3a$
2		$-2a$
1		$-a$
0		0

$-a$

$-a$

$-a$

③ yの値は（$-a$）増える

④ この値は　①の

（xの係数）に等しい。

次の表をよく見て、気づくことを言いなさい。

$$\boxed{y = \frac{3}{5}x}$$

1　2　3

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{12}{5}$	3

$\frac{3}{5}$　$\frac{6}{5}$　$\frac{9}{5}$

$$\boxed{y = \frac{2}{5}x}$$

1　2　3

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	2

$\frac{2}{5}$　$\frac{4}{5}$　$\frac{6}{5}$

$$\boxed{y = \frac{1}{5}x}$$

1　2　3

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

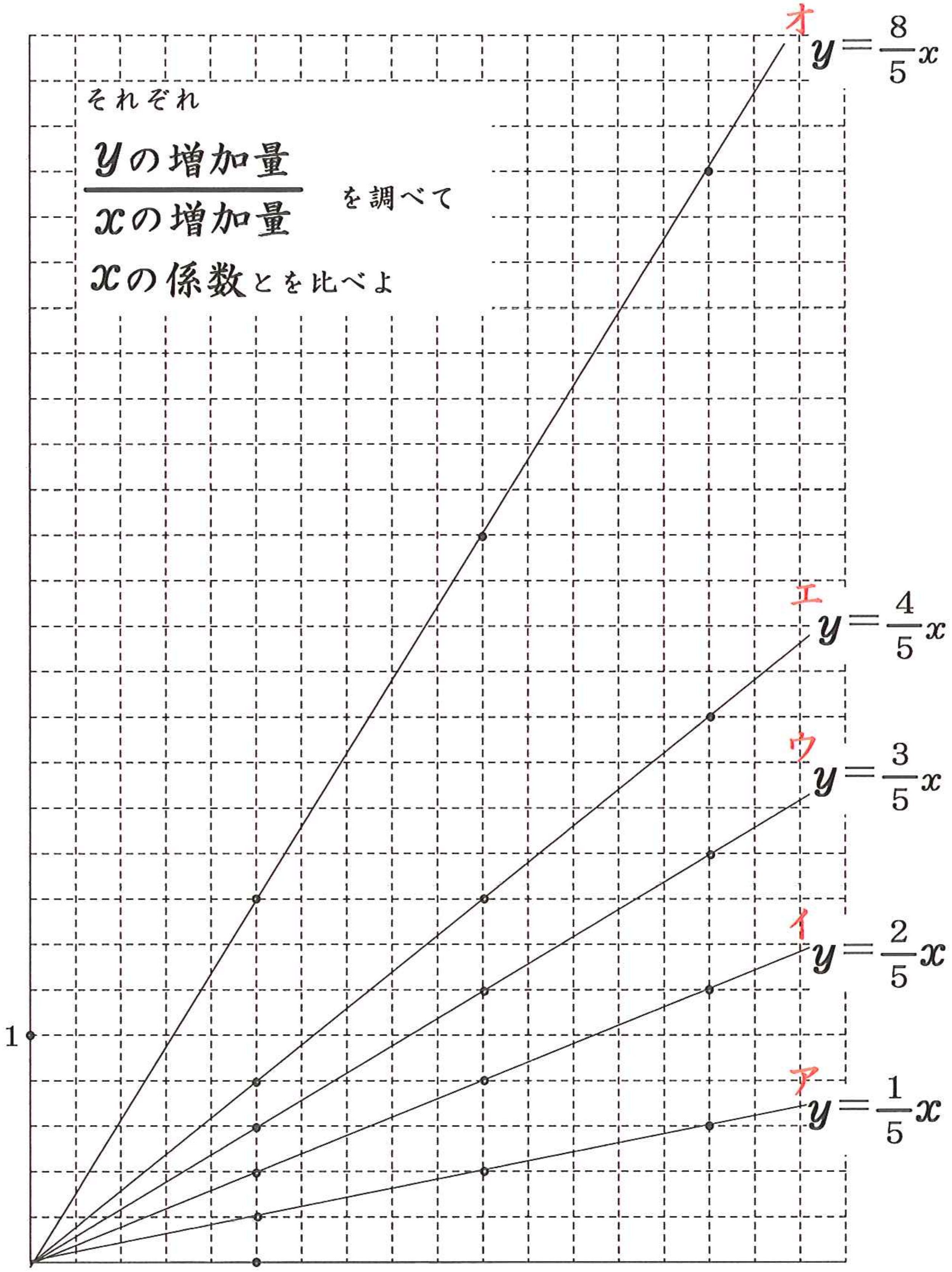
$\frac{1}{5}$　$\frac{2}{5}$　$\frac{3}{5}$

$$\boxed{\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = x\text{の係数}}$$

それぞれ

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を調べて

xの係数とを比べよ



xが１増えるとyは（ xの係数だけ ）増える。

$y=ax$ のとき

ア）xの増加量が１であれば

yの増加量は　aであることがわかった。

では、前の表にもどって 次のことを調べてみよう

イ）xの増加量が２であれば

yの増加量は（ $a\times2$ ）である。

ウ）xの増加量が３であれば

yの増加量は（ $a\times3$ ）である。

エ）xの増加量が m であれば

yの増加量は（ $a\times m$ ）である。

前ページの例で共通するのは何か。

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を調べてみる

ア） $\dfrac{a}{1} = \boxed{a}$

イ） $\dfrac{2a}{2} = \boxed{a}$

ウ） $\dfrac{3a}{3} = \boxed{a}$

エ） $\dfrac{ma}{m} = \boxed{a}$

いずれの場合も

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = a$$

であることが分かった。

$y = ax + b$ における

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ の値を

$y = ax$ における

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ の値と

くらべなさい。

次の式にについて

xの増加量を色々に変化させたとき

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$はどうなるか調べなさい。

$$\boxed{y = 2x+3}$$

x	$2x+3$	y
10	2×10＋3	23
9	2×9＋3	21
8	2×8＋3	19
7	2×7＋3	17
6	2×6＋3	15
5	2×5＋3	13
4	2×4＋3	11
3	2×3＋3	9
4	2×4＋3	7
1	2×1＋3	5
0	2×0＋3	3

＋3　＋2　＋1

＋6　＋4　＋2

いずれの場合も

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$は

元の式のxの係数の

2に等しいことを

確認しなさい。

次の式にについて

xの増加量を色々に変化させたとき

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$はどうなるか調べなさい。

$$\boxed{y = 5x+3}$$

いずれの場合も

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$は

元の式のxの係数の

5に等しいことを

確認しなさい。

x	$5x+3$	y
10	5×10＋3	53
9	5×9＋3	48
8	5×8＋3	43
7	5×7＋3	38
6	5×6＋3	33
5	5×5＋3	28
4	5×4＋3	23
3	5×3＋3	18
2	5×2＋3	13
1	5×1＋3	8
0	5×0＋3	3

＋3　　＋15　$\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{15}{3} = 5$

＋2　　＋10

＋1　　＋5　$\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{5}{1} = 5$

$y = ax + b$について

xの増加量を色々に変化させたとき

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$はどうなるか調べなさい。

$\boxed{y = ax + b}$

x	$ax + b = y$
10	$10a + b$
9	$9a + b$
8	$8a + b$
7	$7a + b$
6	$6a + b$
5	$5a + b$
4	$4a + b$
3	$3a + b$
2	$2a + b$
1	$a + b$
0	b

$+3$　$+3a$　$\dfrac{3a}{3} = a$

$+1$　$+a$　$\dfrac{a}{1} = a$

$+2$　$+2a$　$\dfrac{2a}{2} = a$

いずれの場合も

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$は

元の式のxの係数に等しいことを確認しなさい。

今見てきたように、

$$y = ax$$

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{n}{m}x$$ などにおいて

$\left(\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}\right)$ は

常に（一定）であり

（xの係数）に等しい

ことが分かった。

そこで

これに名称をつけ

$\boxed{\text{変化の割合}}$ と呼ぶ事にした。

次の1次関数で
xの値が１ずつ 増加すると
yの値はいくらずつ 増加するか調べよ。

$y = x$	$y = 2x$	$y = 3x$
$y = x+1$	$y = 2x+1$	$y = 3x+1$
$y = x+2$	$y = 2x+3$	$y = 3x+2$
$y = x-1$	$y = 2x-1$	$y = 3x-1$
$y = x-10$	$y = 2x-10$	$y = 3x-10$

$y = \frac{1}{2}x$	$y = \frac{1}{2}x+1$	$y = \frac{1}{2}x-1$
$y = \frac{1}{3}x$	$y = \frac{1}{3}x+2$	$y = \frac{1}{3}x-2$
$y = \frac{2}{3}x$	$y = \frac{2}{3}x+4$	$y = \frac{2}{3}x-4$
$y = \frac{3}{4}x$	$y = \frac{3}{4}x+1$	$y = \frac{3}{4}x-1$

$y = ax$	$y = ax+b$	$y = ax-b$
$y = \frac{n}{m}x$	$y = \frac{n}{m}x+p$	$y = \frac{n}{m}x+q$

次の1次関数で
xの値が１ずつ 増加すると
yの値はいくらずつ 増加するか調べよ。

$y=-x$	$y=-2x$	$y=-3x$
$y=-x+1$	$y=-2x+1$	$y=-3x+1$
$y=-x+2$	$y=-2x+3$	$y=-3x+2$
$y=-x-1$	$y=-2x-1$	$y=-3x-1$
$y=-x-10$	$y=-2x-10$	$y=-3x-10$

$y=-\frac{1}{2}x$	$y=-\frac{1}{2}x+1$	$y=-\frac{1}{2}x-1$
$y=-\frac{1}{3}x$	$y=-\frac{1}{3}x+2$	$y=-\frac{1}{3}x-2$
$y=-\frac{2}{3}x$	$y=-\frac{2}{3}x+4$	$y=-\frac{2}{3}x-4$
$y=-\frac{3}{4}x$	$y=-\frac{3}{4}x+1$	$y=-\frac{3}{4}x-1$

$a>0$、$m>0$、$n>0$、$b>0$、

$y=ax$	$y=-ax+b$	$y=-ax-b$
$y=\frac{n}{m}x$	$y=-\frac{n}{m}x+p$	$y=-\frac{n}{m}x+q$

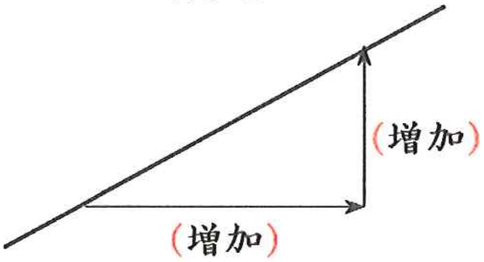
2点が与えられたときの

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

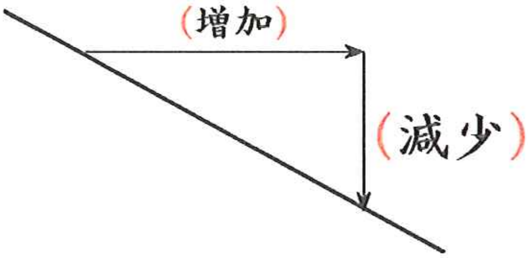
の求め方について
考えてみよう。

中1の正比例において見たように

直線の傾きを



のほかに、



と $\boxed{\text{減少}}$ を使って表す。

一方、中2では

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ と表して

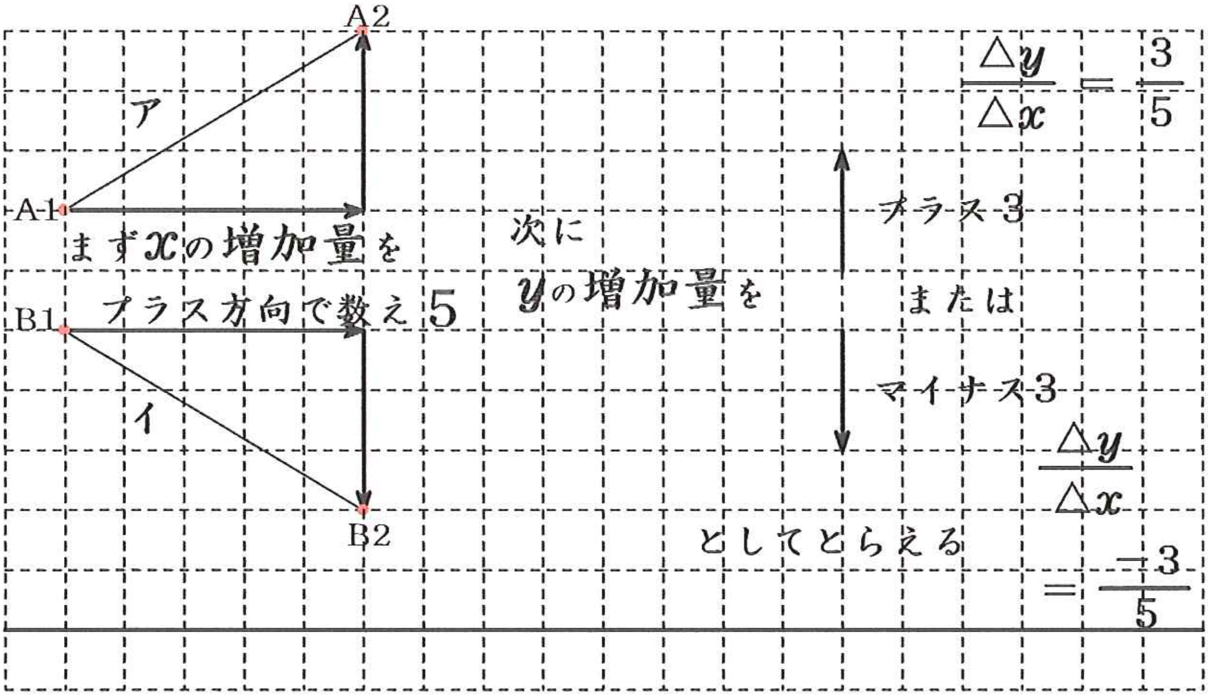
yの 減少量 は、

増加量の言葉は

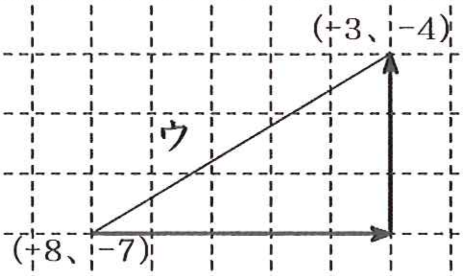
そのままに

$\boxed{\text{負の数}}$ を使う

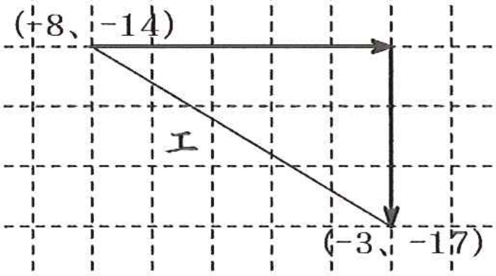
次のア〜エにおける 2点の傾きを $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ で示してみよう。



次のア～エにおける 2点の傾きを $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ で示してみよう。



$$\frac{-4-(-7)}{-3-(-8)}=\frac{3}{5}$$



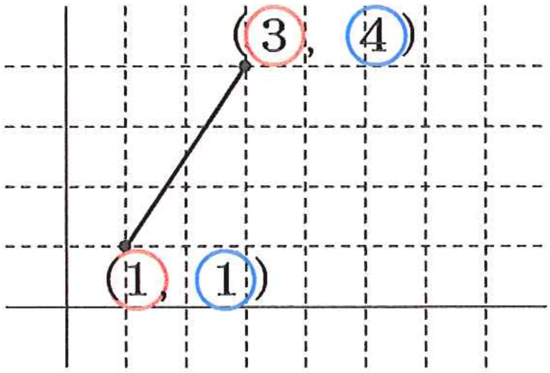
$$\frac{-17-(-14)}{-3-(-8)}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$$

2点 (1, 1)　(3, 4) を

むすぶ直線の

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$

を求める



x の増加量は　$3 - 1 = 2$

y の増加量は　$4 - 1 = 3$

$$\frac{3}{2}$$

※　ところでこれを

（1、1）→（3、4）
と増えたとせずに
逆に（3、4）→（1、1）
と考えると

増加量は
x　1－3 ＝ －2
y　1－4 ＝ －3
　　　　　となるので

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$$ は

$$\frac{-3}{-2}$$ となる

一見
先ほどの数値とちがうように
見えるが
$\frac{-3}{-2}$ は　分母と分子に
-1　をかけると
$\frac{3}{2}$ となり

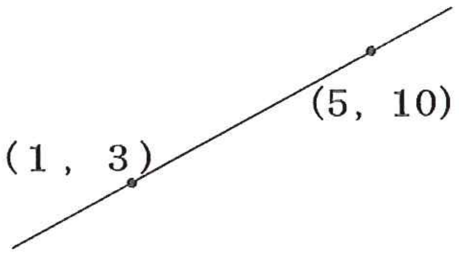
先ほどの数値と
一致する。

即ち

$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を求めるとき

どちらの点を基準にして
増加量を計算しても
結果は同じになるのである。

これは、
点の座標が
（-1、-1）（3、-4）などと
マイナスの値であっても
関係なく成り立つことである。



この2点の傾きを
計算は、ふつう
xの増加量が
正の値になるように

$\dfrac{10-3}{5-1} = \boxed{\dfrac{7}{4}}$ とするが

$\dfrac{3-10}{1-5}$ としても

$= \dfrac{-7}{-4} = \boxed{\dfrac{7}{4}}$ となり

結果的には一致する。

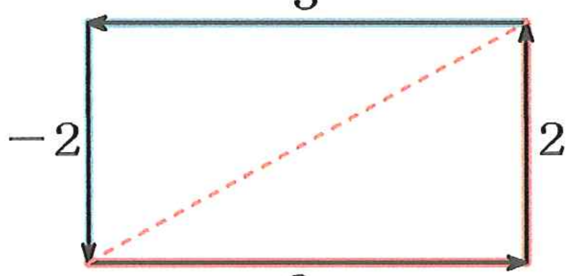
それゆえ

$$\begin{array}{rr} & (x,\ \ y) \\ & (5,\ 10) \\ -) & (1,\ \ 3) \\ \hline & \cancel{4\ ,\ 7} \\ & \dfrac{7}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & (x,\ \ y) \\ & (1,\ \ 3) \\ -) & (5,\ 10) \\ \hline & \cancel{-4\ ,\ -7} \\ & \dfrac{-7}{-4} = \dfrac{7}{4} \end{array}$$

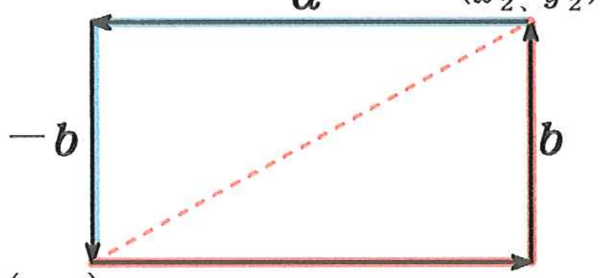
と考えると $\boxed{\text{傾き}}$ は
かなりキカイ的に計算できる。

今のことを一般的に言うと右下の通り。

（参考）



（参考）



$$\frac{2}{3}$$ と

$$\frac{-2}{-3}$$ は

一致する。

$$\frac{b}{a}$$ と

$$\frac{-b}{-a}$$ は

常に等しい。

少し分かりづらいが、座標を文字で表して計算してみよう。

$$\begin{array}{rl} & x_1、y_1 \\ -) & x_2、y_2 \\ \hline & x_1-x_2、y_1-y_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & x_2、y_2 \\ -) & x_1、y_1 \\ \hline & x_2-x_1、y_2-y_1 \end{array}$$

㋐ $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{-(y_2-y_1)}{-(x_2-x_1)}=\text{㋑}\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

㋐と㋑は

一致する。

次の2点を結ぶ直線の傾きを求めなさい。

ア）（−5，5）．（−３，7）

イ）（−5，3）．（−2，2）

傾きを2通りの方法で計算しなさい

ア）

$$\begin{array}{rr} & (\ x,\ \ y\ ) \\ & (-5,\ \ 5) \\ -) & (-3,\ \ 7) \\ \hline & -2,\ -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & (\ x,\ \ y\ ) \\ & (-3,\ \ 7) \\ -) & (-5,\ \ 5) \\ \hline & 2,\ \ 2 \end{array}$$

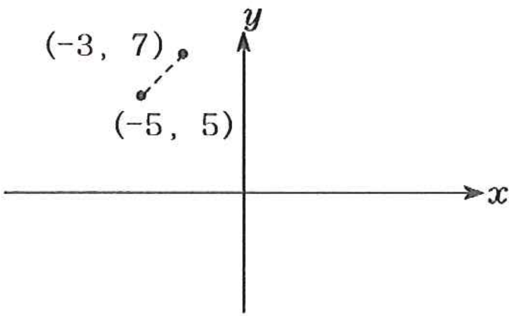
$$\frac{-2}{-2}=1 \qquad \frac{2}{2}=1$$

イ）

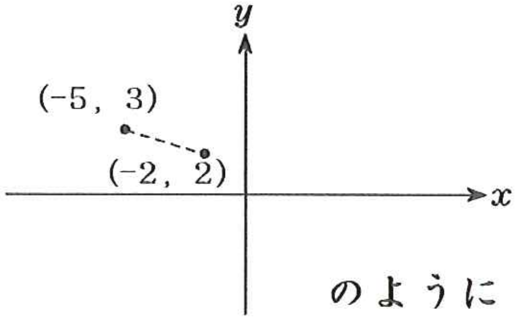
$$\begin{array}{rr} & (-5,\ \ 3) \\ -) & (-2,\ \ 2) \\ \hline & -3,\ \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & (-2,\ \ 2) \\ -) & (-5,\ \ 3) \\ \hline & 3,\ -1 \end{array}$$

$$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3} \qquad \frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

上のように計算で求めるときも



や



のように

座標に簡単に表すだけで，ミスはおどろくほど減る

計算結果のおそよをチェックできる。

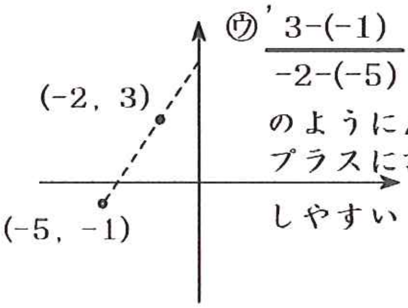
（−５，−１）（−２，３）の $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ を

計算と座標で求めてみよう。

$(\ x,\ y\ )$

$$
\begin{array}{rrr}
 & (-5, & -1) \\
-) & (-2, & 3) \\
\hline
(増加量) & -3\ , & -4
\end{array}
\qquad \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}
$$

座標に表してからだと



ウ' $\dfrac{3-(-1)}{-2-(-5)} = \dfrac{4}{3}$

のように$\triangle x$を
プラスに計算
しやすい

次の2点を与えられたときの $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ を

計算と座標で求めてみよう。

カ）　（１，７）（３，８）

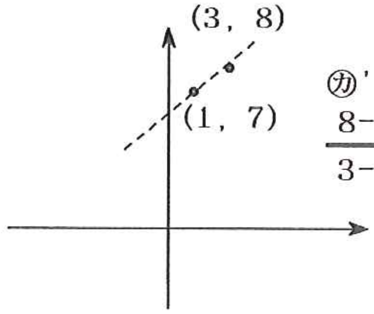
キ）　（２，６）（５，７）

ク）　（５，２）（８，７）

カ)

　　（1 , 7）
ー)　（3 , 8）
―――――――――
　　−2 , −1

$$\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

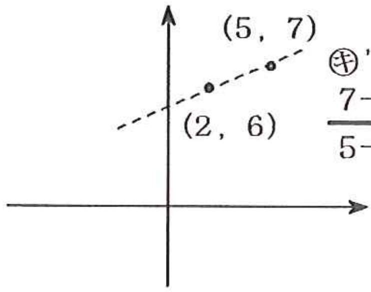


㋕'
$$\frac{8-7}{3-1}=\frac{1}{2}$$

キ)

　　（2 , 6）
ー)　（5 , 7）
―――――――――
　　−3 , −1

$$\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

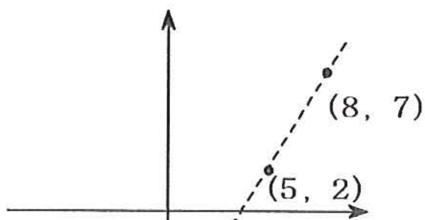


㋖'
$$\frac{7-6}{5-2}=\frac{1}{3}$$

ク)

　　（5 , 2）
ー)　（8 , 7）
―――――――――
　　−3 , −5

$$\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$



㋗'
$$\frac{7-2}{8-5}=\frac{5}{3}$$