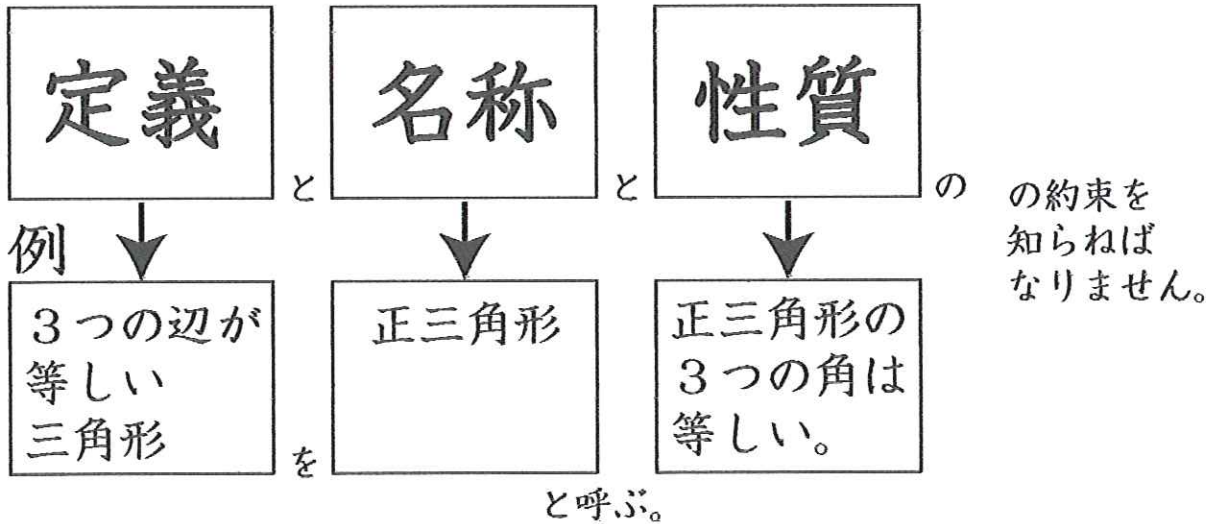


図形の証明システムを理解するには

先ず

① 図形の形を知るとともに



次に

② 証明は順に進むので

その順を知らねばなりません。 ※

ステップ1 [対頂角は等しい]
[平行線ならば 同位角は等しいなど]

ステップ2 [三角形の合同条件]

ステップ3の1 [2辺が等しい三角形は2角が等しい]
[直角三角形の合同条件]

ステップ3の2 [平行四辺形の性質]
[平行四辺形になる条件]

※また、前のステップは、一々証明せずに
使ってよいことも確認しましょう。

さらに

③ **証明**は、学習者が自力だけで発見すべきもの
ではありません。

歴史を重ねる中で約束された部分が多いので
**良い証明を読み、真似ることから始めるのが
良い学習方法です。**

さいごに

証明は
文や式で表されるので、目は
文や式にとらわれがちですが
文や式は
図形を模したものですから
学習者が見るべきは図形そのものです。
そして

図形で納得したことを文字や式に表す。

くりかえします。

**図形で表現したことを
文字や式に表しなおす**

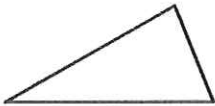
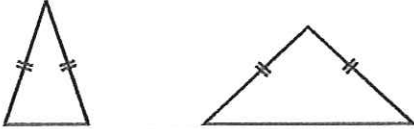
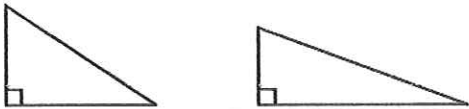
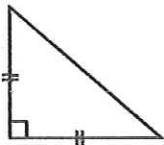

これが[証明せよ]の[こたえ]の部分です。

文字や式は
図形の影です。

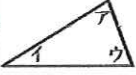
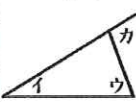
図形の本体そのものを
しっかりと確認しましょう。

図形の本体そのものでの証明ができれば
文字や式の表し方での約束はわずかですから
証明表現力はすぐにできます。

三角形の名称・定義・性質

一般的名称	定義
<p>三角形</p> 	<p>3つの辺で囲まれた図形 を三角形と言う。</p>
<p>二等辺三角形</p> 	<p>2つの辺が等しい三角形 を二等辺三角形と言う。</p>
<p>直角三角形</p> 	<p>直角のある三角形 を直角三角形と言う。</p>
<p>直角二等辺三角形</p> 	<p>直角があり 2つの辺が等しい三角形 を直角二等辺三角形と言う。</p>
<p>正三角形</p> 	<p>3つの辺が等しい三角形 を正三角形と言う。</p>
<p>三角形の一般名称は かなり定義を示している。</p>	

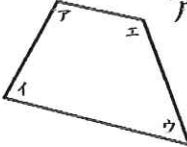
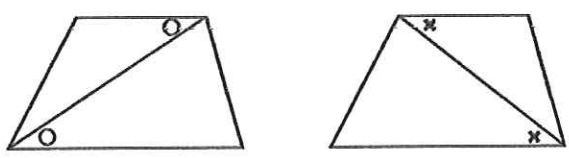
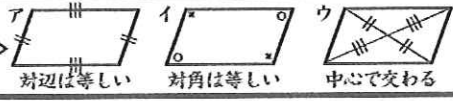
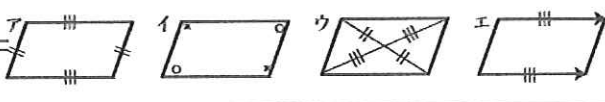
三角形の名称・定義・性質

定義的名称	性質
<p>三辺形</p>	 <p>内角の和 = $ア + イ + ウ = 180^\circ$</p>  <p>外角 = $イ + ウ$ (内対角の和)</p>
<p>通称に同じ (二等辺三角形)</p>	<p>両底角は 等しい</p>
<p>通称に同じ (直角三角形)</p>	<p>直角以外の角の和は 90° $a + b = 90^\circ$ $a = 90^\circ - b$</p>
<p>通称に同じ (直角に等辺三角形)</p>	<p>90° 45° 45°</p>
<p>^{さん}三等辺三角形</p>	<p>3つの角が等しい</p>

四角形の名称・定義・性質

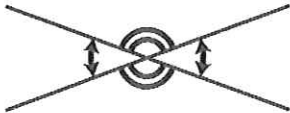
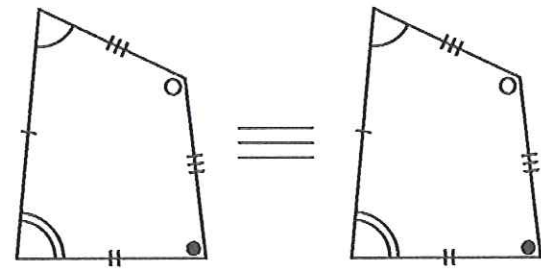
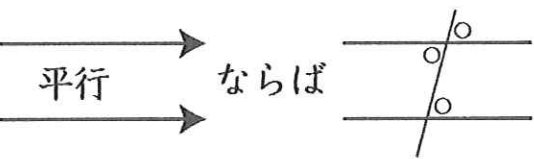
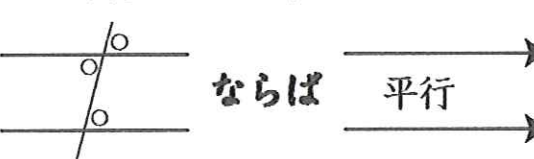
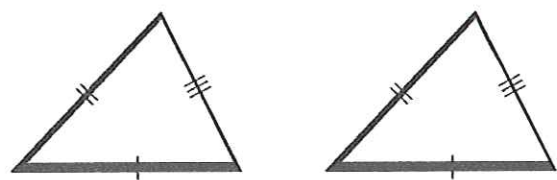
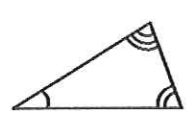
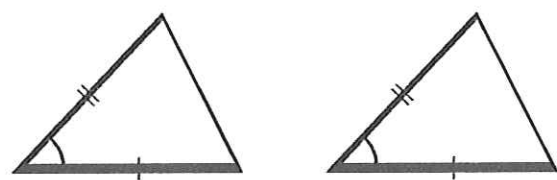
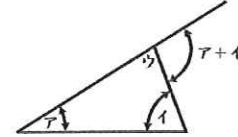
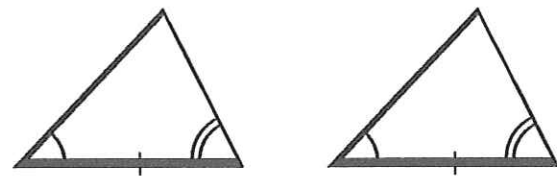
一般的名称	定義
四角形	4つの辺で囲まれた図形 を四角形と言う。
台形	1組の対辺が平行な <small>ひとくみ</small> 四角形 を台形と言う。
平行四辺形	2組の対辺が平行な <small>ふたくみ</small> 四角形 を平行四辺形と言う。
長方形	4つの角が全て等しい 四角形 を長方形と言う。
ひし形	4つの辺が全て等しい 四角形 をひし形と言う。
正方形	4つの角が全て等しく 4つの辺が全て等しい 四角形 を正方形と言う。
<p>四角形の名称は 三角形ほどは定義を示していない。 それゆえ 一般的名称をくり返し唱えても 問題解決には進みにくい。</p>	<p>※定義にもどるか定義的名称に進んで 考えること！が大切！</p>

四角形の名称・定義・性質

定義的名称	性質	
四辺形	 $ア + イ + ウ + エ = 360^\circ$ (4つの内角の和は 360°)	
ひと組対辺 平行四辺形		
ふた組対辺 平行四辺形	ならば \Rightarrow  ならば \Leftarrow 	
4等角四辺形	対角線は等しい。	対辺は等しい 対角は等しい 対角線は中点で交わる
4等辺四辺形	対角線は垂直に交わる。	対辺は等しい 対角は等しい 対角線は中点で交わる
4等角 4等辺四辺形	対角線は等しく垂直に交わる。	対辺は等しい 対角は等しい 対角線は中点で交わる
長方形、ひし形、正方形は平行四辺形のグループに属するので平行四辺形の性質はすべて持っている。		

平行四辺形で言えたことはここでも言える。

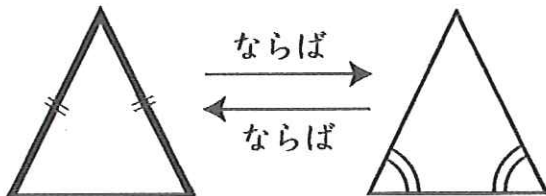
証明の基本定理を図示すると

証明ステップ 1	証明ステップ 2
 <p style="margin-left: 20px;">対頂角は 等しい</p>	<p>合同な図形では 対応する辺も 対応する角も等しい</p> 
<p>平行ならば</p>  <p>同位角、錯角が等しい</p> <p>ならば 平行</p> 	<p style="text-align: center;">三角形の合同条件</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p>ア 3辺^かが等しいとき</p> 
 <p>三角形の内角の和は 180°</p>	<p>イ 2辺と間の角が等しいとき</p> 
 <p>三角形の外角は 内対角の和</p>	<p>ウ 1辺と両端の角^{たんはし}が等しいとき</p> 
<p>多角形の内角の和 $= 180^\circ \times (n-2)$</p> <p>外角の和は常に 360°</p>	

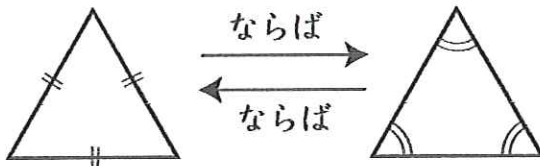
全体像

証明ステップ 3の1

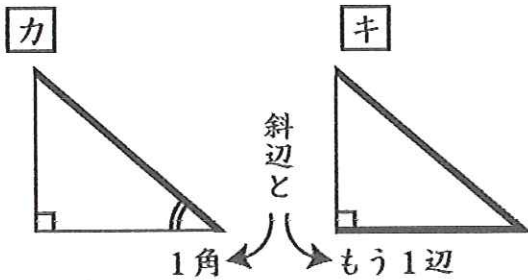
二等辺三角形



正三角形

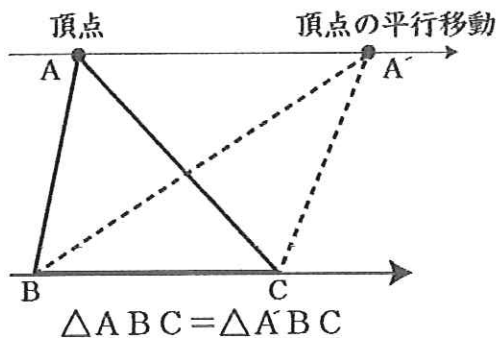


直角三角形の 合同条件



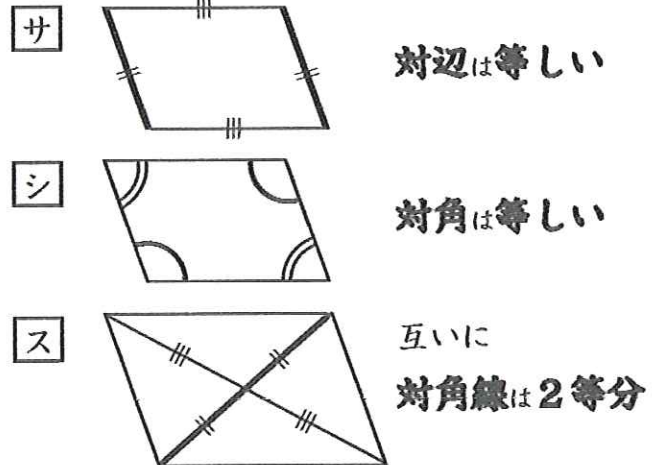
これは
ステップ2でも可能

平行線と面積

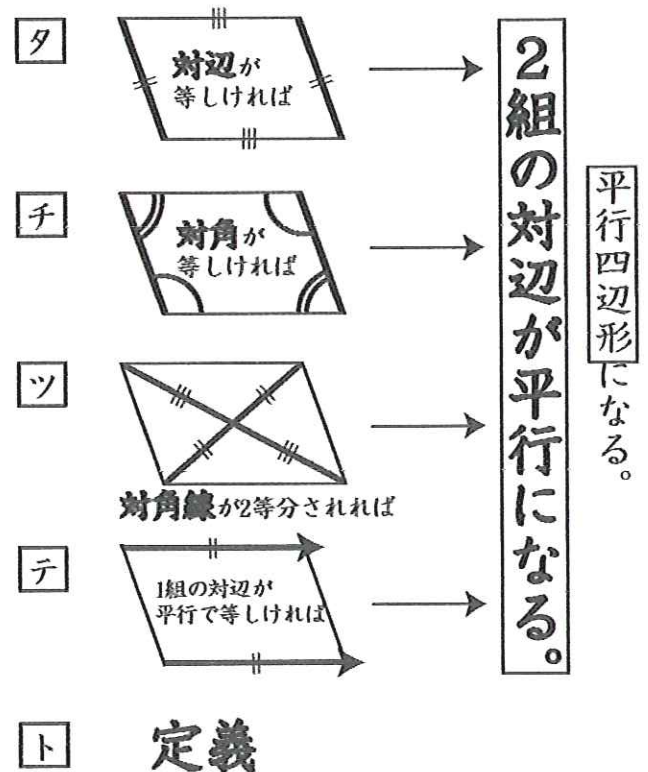


証明ステップ 3の2

A 平行四辺形の性質



B 平行四辺形になる条件



定義

証明に使われる 基本定理を文で示すと

ステップ 1	ステップ 2
<p>対頂角は等しい</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px 0;"> 平行線 </div> \Rightarrow <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px 0;"> 同位角 錯角は 等しい </div> \Leftarrow	<p>合同と言われた図形では</p> <p>対応する線分 対応する角 は等しい</p> <p>三角形の合同条件</p> <ul style="list-style-type: none"> ① 3辺 ② 2辺と 間の角 ③ 1辺と 両端の角 <p>がそれぞれ等しい。</p>
<p>三角形</p> <p>内角の和 = 180°</p> <p>外角 = 内対角の和</p> <p>多角形</p> <p>内角の和 = $180^\circ \times (n-2)$</p> <p>外角の和 = 360°</p>	

基本定理

次のステップに進んだとき
前のステップは証明済みとして
使ってよい約束です。

ステップ 3の1

2つの辺が等しい三角形



2つの角が等しい三角形

3つの辺が等しい三角形



3つの角が等しい三角形

直角三角形の 合同条件

- ① 斜辺と1角
- ② 斜辺と他の1辺

がそれぞれ等しい。

平行線と面積

三角形の頂点を
底辺と平行に
移動してできた三角形は
元の三角形と同面積。

ステップ 3の2

A

平行四辺形の性質

- ① 対辺が等しい
- ② 対角が等しい
- ③ 対角線は
中点で交わる

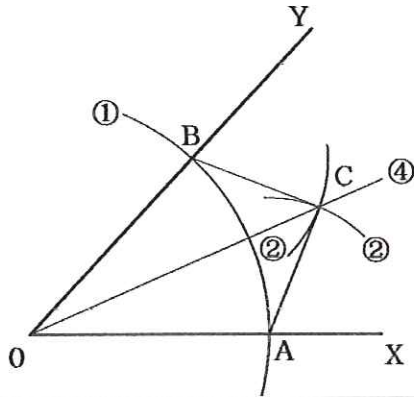
B

平行四辺形に なる条件

- ① 対辺が2組とも等しい
- ② 対角が2組とも等しい
- ③ 対角線が中心で交わる
(以上性質に同じ)
- ④ 1組の対辺が
平行で等しい
- ⑤ 定義

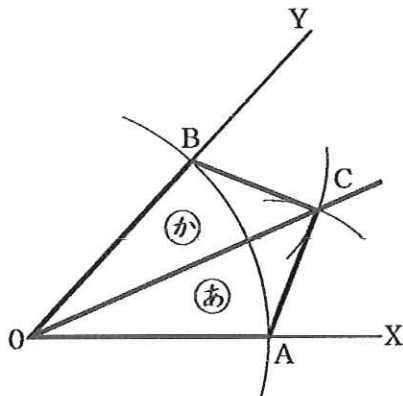
ステップ2を使う証明

下図は $\angle XOY$ を
2等分する図です。
作図の順をよく見て写しなさい。



- ① 点Oから
OAを半径とする弧をかく。
- ② 点A、点Bから
等しい半径の弧を書く。
交点Cをとる。
- ③ OCをむすぶ。

三角形②と③をくらべて
合同になる理由を示しなさい。



三角形②の \longrightarrow A O C
 に対応するのは
 三角形③の \longrightarrow B O C
 である。

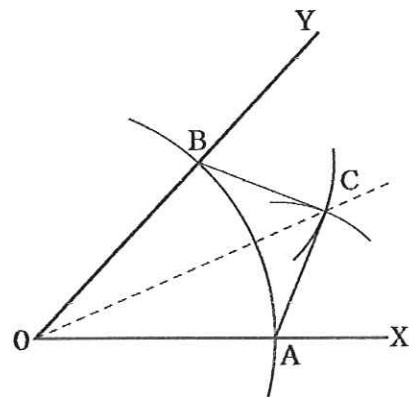
② ③
 $OA = OB$
 $AC = BC$
 OCは共通

3辺がそれぞれ等しいので

$$\triangle AOC \equiv \triangle BOC$$

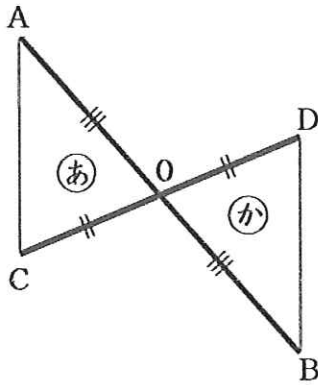
合同な図形では
対応する角は等しいから

$$\angle AOC = \angle BOC \text{ である。}$$



ステップ2を使う証明

線分ABと線分CDが
点Oで交わり



$AO = BO$ ①

$CO = DO$ ②

である。

このとき

三角形①と②において

対頂角は等しいので

$\angle AOC = \angle BOD$ ③

①②③により

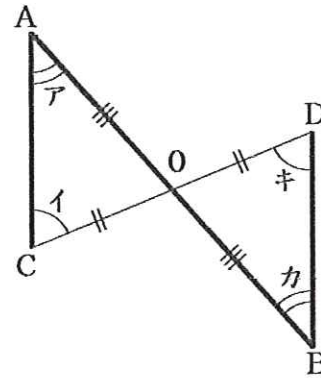
三角形①と②は

2辺とその間の角が等しいので

合同である。

$\triangle AOC \equiv \triangle \boxed{B} \boxed{O} \boxed{D}$

合同であれば
対応する角は等しいから



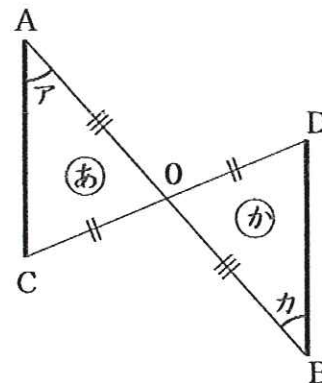
角ア = 角カ

角イ = 角キ

[角ア]と**[角カ]**が等しい

ということは**[錯角]**が

等しいことなので



$AC // \boxed{DB}$

ステップ2を使う証明

$AB=AC$



$AB=AC$
である
三角形の



$\angle A$ の2等分線
を引いてできる

2つの
三角形

① **あ**と**か**をくらべる

(初めに決めたのだから)

① $AB=AC$

(角Aの二等分線をひいたのだから)

② $\angle BAD = \angle CAD$

(見たとおり)

③ AD は共通

よって

①と②は合同

① ③ ②

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$

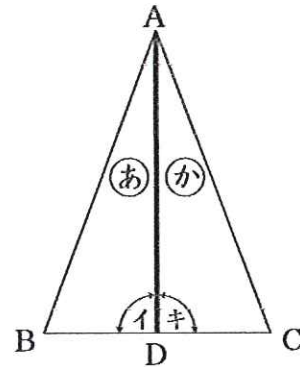
だから

$\angle B = \angle C$

上記以外にも

等しい辺や等しい角

がある。



① $BD = DC$

② $\angle B = \angle C$ で

$\angle B + \angle C = 180^\circ$
だから

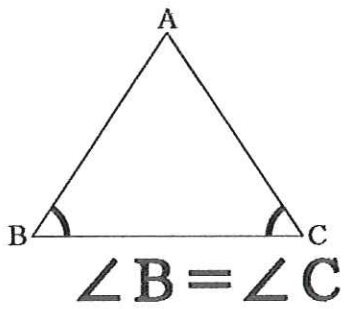
$\angle B = \angle C = 90^\circ$

よって

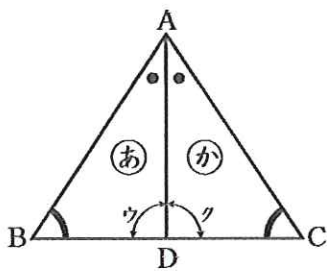
二等辺三角形の
頂角の二等分線は
底辺を
垂直に二等分する。

と言える。

ステップ2を使ってステップ3-1を証明

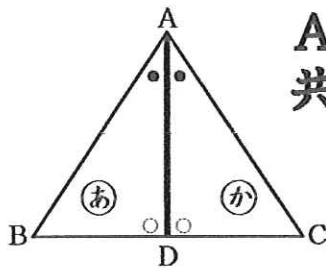


のとき
∠Aの二等分線
 を引くと



三角形(あ)と(か)ができる。

2つの角が等しいので
残りの角ウとクも
 等しくなる。



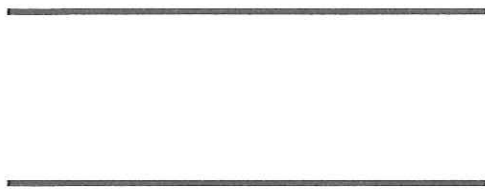
ADは
共通だから

1辺(AD)と
 両はしの角が等しいので
合同!

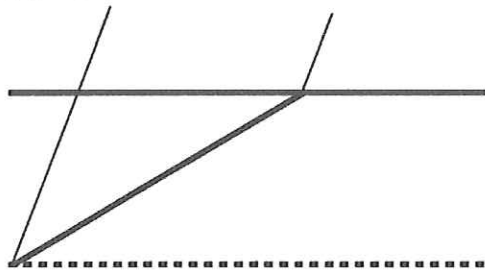
$\triangle ABD$
 $\equiv \triangle ACD$ ゆえに
 $AB = AC$

ステップ3-1を使う証明

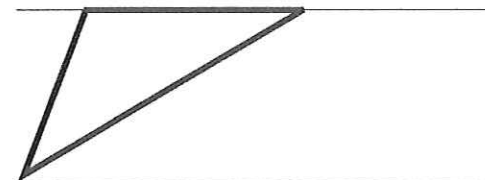
テープがあります。



これを下図のように
折り返します。



できた三角形が



二等辺三角形であることを
次のように考えて証明します。

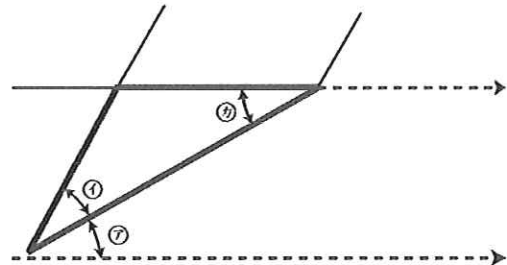
折り返しする問題を
解くコツの1つは

折り返す前と後は同じ

ということです。

(折り返したのだから)

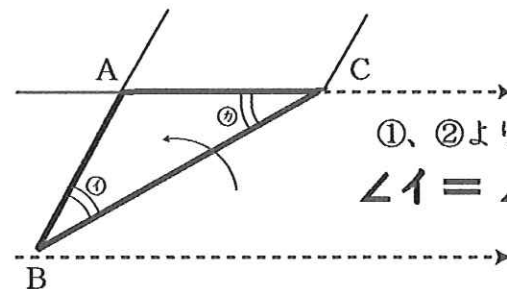
$$\angle \text{ア} = \angle \text{イ} \text{ ----- ①}$$



上の図において

紙テープの両端の線は
平行だから錯角は等しい
ので

$$\angle \text{ア} = \angle \text{カ} \text{ ----- ②}$$



①、②より
 $\angle \text{イ} = \angle \text{カ}$

$\triangle ABC$ の

$$\angle \text{イ} = \angle \text{カ}$$

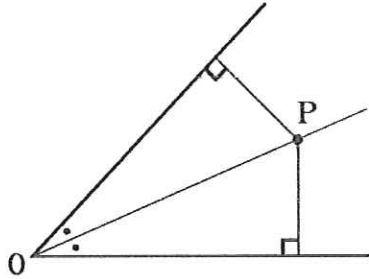
だから

$\triangle ABC$ は

[二等辺三角形]

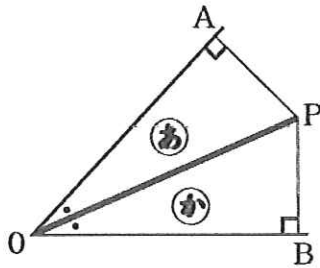
ステップ2を使ってステップ3-1を証明

角Oの2等分線上の点Pから
角の2辺に垂線を引くと



2つの直角三角形

①と②ができる。



斜辺OPが共通で

$\angle AOP$

$= \angle BOP$ だから

直角三角形の合同条件

斜辺と他の1角が等しいとき
直角三角形である。

により

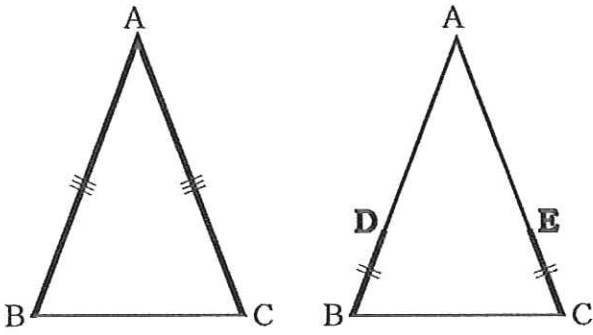
$\triangle OAP$

$\equiv \triangle OBP$

よって

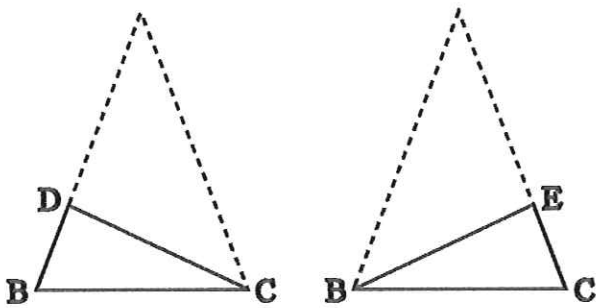
$AP = BP$

$OA = OB$



$$AB = AC$$

$$BD = CE \text{ のとき}$$



$\triangle BCD$ と $\triangle CBE$ において

① BC は共通

AB = AC だから

② $\angle B = \angle C$

③ DB = EC

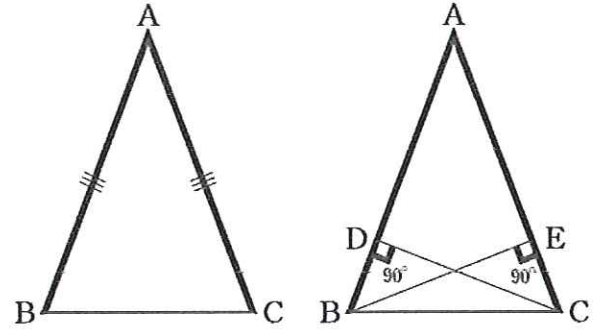
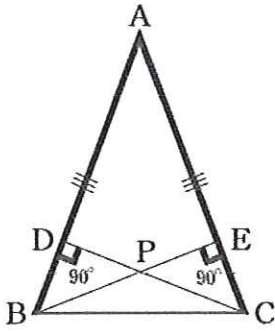
三角形の合同条件

2 辺とその間の角が等しい時
2 つの三角形は合同。

により

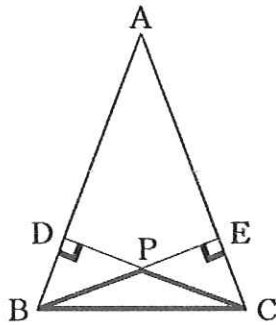
$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$$

ステップ2を使ってステップ3-1を証明



右の
 $\triangle PBC$
について考える。

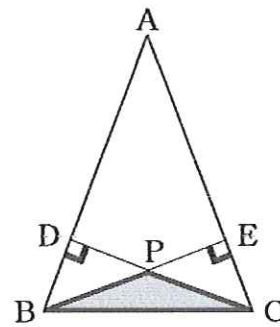
見るところ
二等辺三角形
だろうと思われる。



$AB=AC$

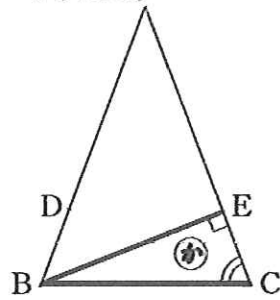
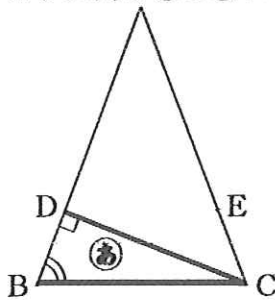
$\angle BDC=\angle CEB=90^\circ$

ならば



$PB=PC$

まず三角形**あ**と**か**について考える。



斜辺は共通

- 共通だから **$BC=CB$** ①
- 二等辺三角形の **$\angle B=\angle C$** ②
- 両底角は等しい 直角が両方にある③

よって

直角三角形の合同条件

斜辺と他の1角が等しい
直角三角形は合同。

により

対応する角 $\angle BCD=\angle CBE$

2つの角の等しい三角形は

二等辺三角形

ステップ2を使って

平行四辺形の性質 ㉗ ㉘ を証明
(ステップ3-2A)

㉗ 対辺は等しい

㉘ 対角は等しい

を証明する。

そのあと

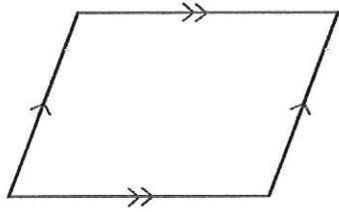
ステップ3-2Aの
平行四辺形の性質も使って

ステップ3-2A
平行四辺形の性質 ㉙

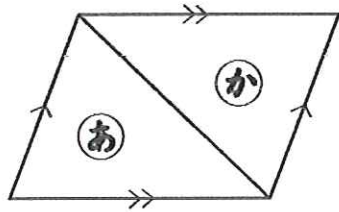
㉙ 対角線は中点で交わる

を証明する。

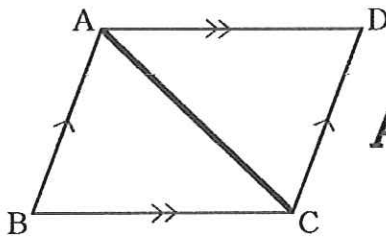
2組の対辺が平行な四角形に



対角線を引く

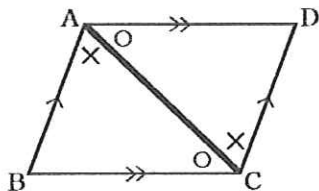
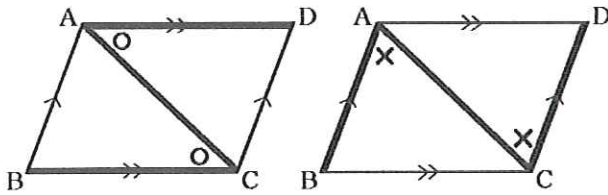


三角形
あとか
が出来る。



AC共通

平行線の錯角は等しいから



1辺AC(=CA)と
両端の角が
それぞれ等しいので

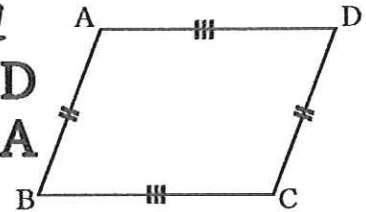
$$\begin{array}{c} \times \quad \circ \\ \triangle ABC \quad \triangle CDA \\ \equiv \triangle CDA \quad \triangle ABC \\ \times \quad \circ \end{array}$$

よって

対応する辺

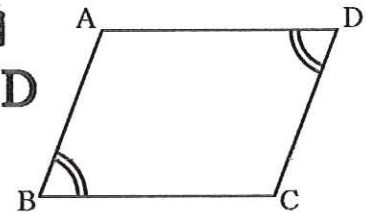
$$AB = CD$$

$$BC = DA$$



対応する角

$$\angle B = \angle D$$



また

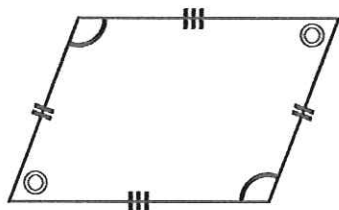
$$\angle A = \angle BAC + \angle CAD$$

||

$$\angle C = \angle DCA + \angle BCA$$

$$\angle A = \angle C$$

今 平行四辺形ならば



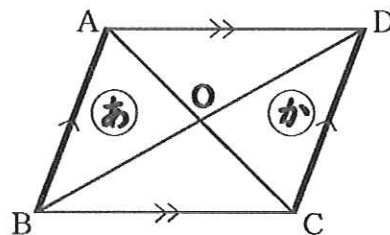
対辺は等しい
対角は等しい
と証明されたので、
以後

平行四辺形の対辺は等しい
平行四辺形の対角は等しい

ことを、証明しないで使う。

ステップ2、3の2Aを使って
ステップ3の2Aを証明

平行四辺形に2本の対角線を引く

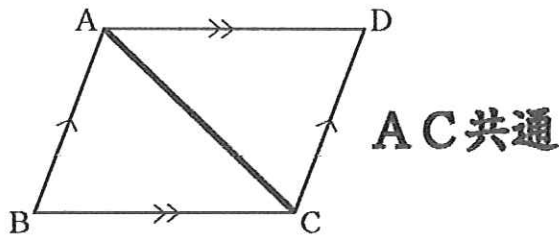
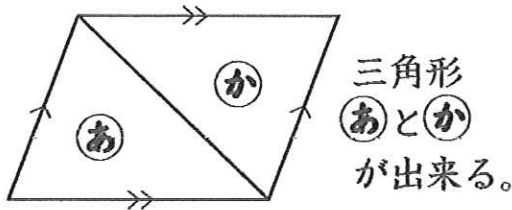
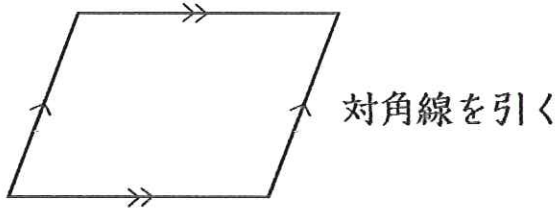


三角形 ①と②において
すでに証明済みの[対辺は等しい]
を使って

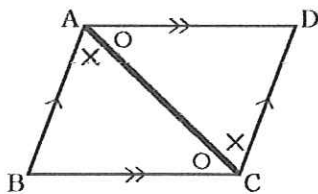
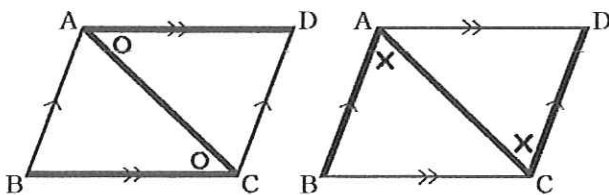
$$AB = \boxed{CD}$$

ステップ2を使って
ステップ3-2Bを証明する。

2組の対辺が平行な四角形に



平行線の錯角は等しいから

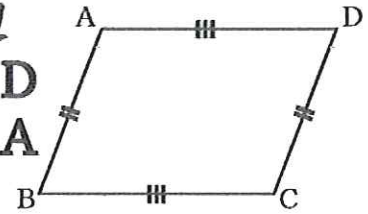


1 辺 AC (= CA) と
両端の角が
それぞれ等しいので

$$\begin{array}{c} \times \quad \circ \\ \triangle ABC \\ \equiv \triangle CDA \\ \times \quad \circ \end{array}$$

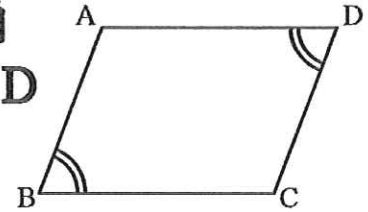
対応する辺

$$\begin{array}{l} AB = CD \\ BC = DA \end{array}$$



対応する角

$$\angle B = \angle D$$

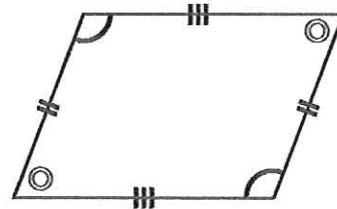


また

$$\begin{array}{l} \angle A = \angle BAC + \angle CAD \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ \angle C = \angle DCA + \angle BCA \end{array}$$

$$\angle A = \angle C$$

今 平行四辺形ならば



対辺は等しい
対角は等しい
と証明されたので、
以後

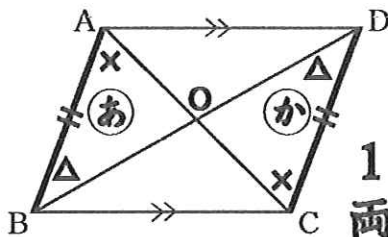
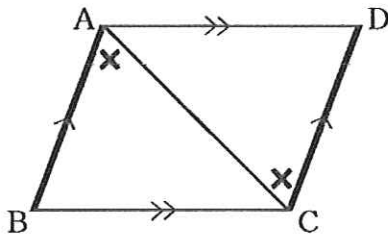
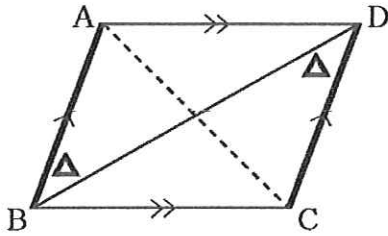
平行四辺形の対辺は等しい
平行四辺形の対角は等しい

ことを、証明しないで使う。

あとは

平行線の錯角は等しい

を使って



1辺と
両端の角が
等しいので

よって

$$AO = CO$$

$$BO = DO$$

このことを

**平行四辺形の対角線は
中点で交わる**
または
互いに他を2等分する

と言う。

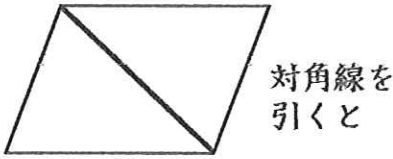
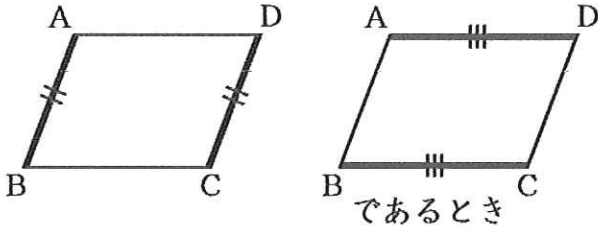
$$\triangle ABO \equiv \triangle CDO$$

↑
対応関係に気をつけて！

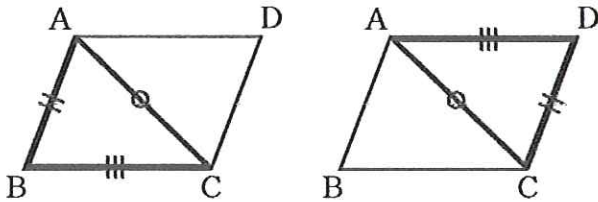
ステップ2を使ってステップ3の2Bを証明

平行四辺形になるための条件の証明

1



2つの三角形ができる



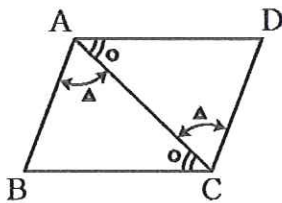
$$AB=CD$$

$$BC=DA$$

$$AC=CA$$

それぞれ等しいので

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

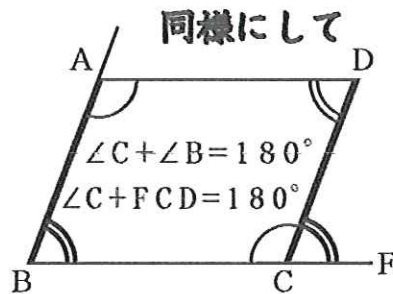
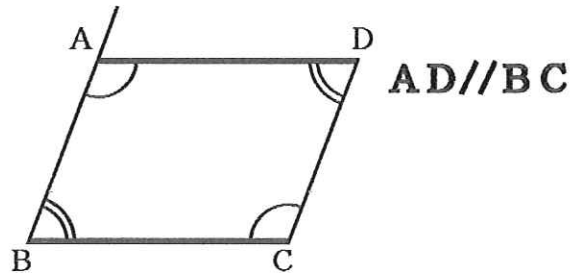
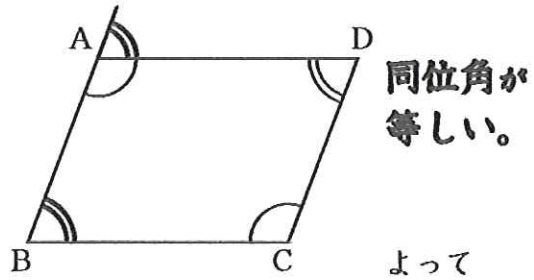
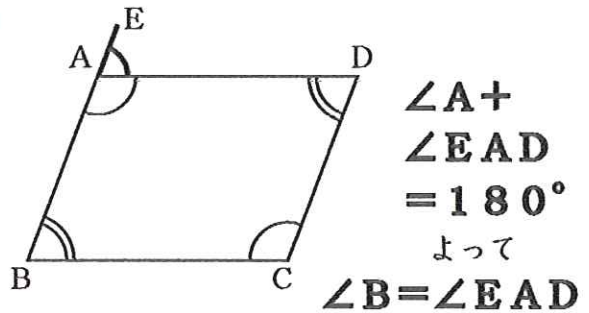
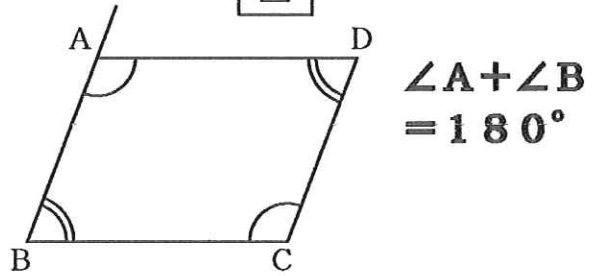


錯角Δによって $AB \parallel CD$

錯角○により $BC \parallel DA$

よって 平行四辺形

2



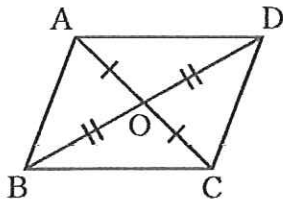
ゆえに $\angle B = \angle FCD$

同位角が等しいので

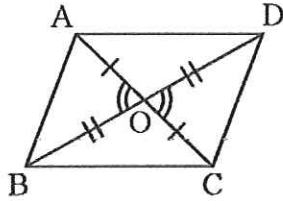
$$AB \parallel DC$$

これはステップ1 を使ったの証明

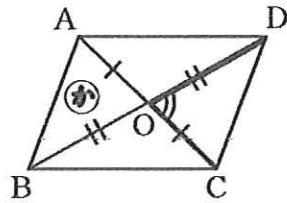
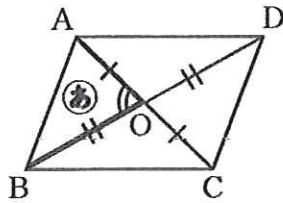
3



$AO=CO$
 $BO=DO$
 であると約束する。



対頂角は等しい。



$\triangle AOB$ と $\triangle COD$ において
 約束により
 $AO=CO$
 $BO=DO$

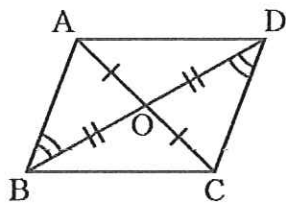
対頂角

$\angle AOB \equiv \angle COD$

2辺とその間の角が等しいので

$\triangle AOB \equiv \triangle COD$

よって
 対応する角が
 等しいので



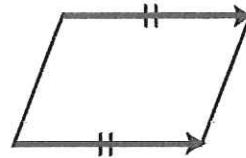
$\angle ABO = \angle CDO$

錯角が等しいので

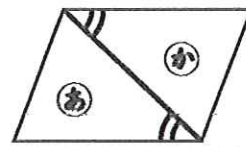
$AB \parallel DC$

同様にして・・・中略・・・ $AD \parallel BC$

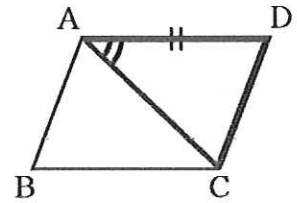
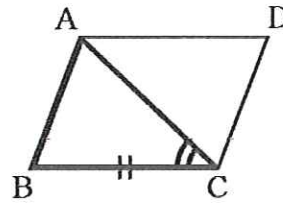
4



1組の対辺が
 平行で等しい時



三角形
 (あ)と(か)は合同
 なぜなら
 平行だから錯角は等しい。



約束により

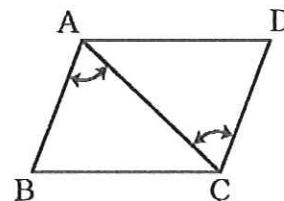
$BC=DA$

ACは共通

三角形の合同条件

2辺とその間の角が等しいとき
 三角形は合同である。

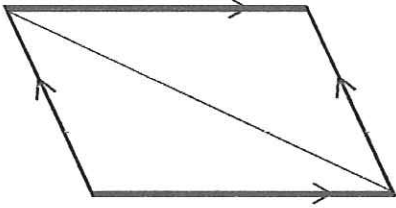
により
 対応する角
 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA \Rightarrow \angle BAC = \angle DCA$



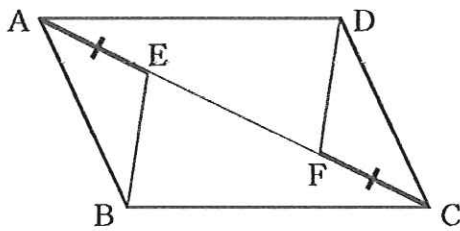
錯角が等しいので
 $AB \parallel DC$
 2組の対辺が
 平行となる。

ステップ3の2Bを使う証明

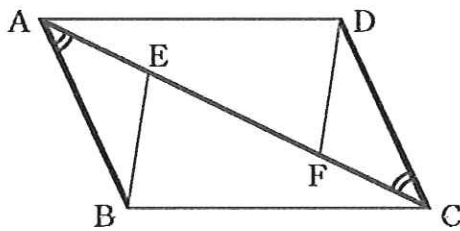
平行四辺形がある



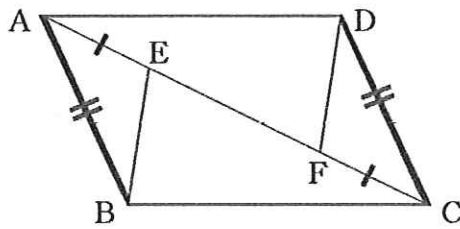
$AE = CF$ とする。



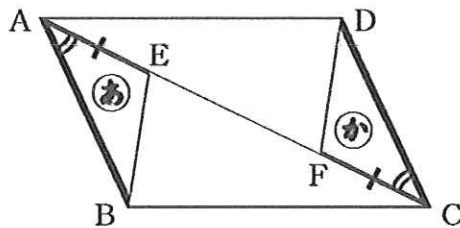
平行線の錯角は等しいから



平行線の対辺は等しいから



② ≡ ③

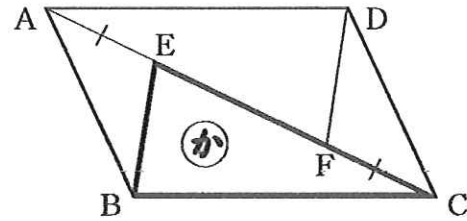
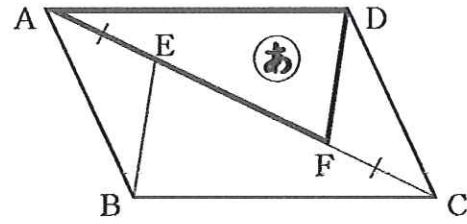


何故なら2辺とその間の角がそれぞれ等しいので。

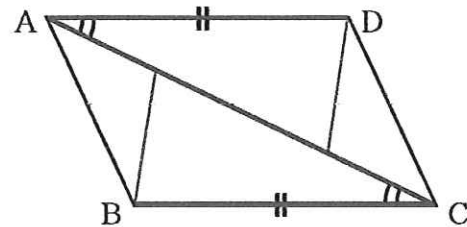
よって $EB = FD$

平行四辺形がある

$AE = CF$ とする。

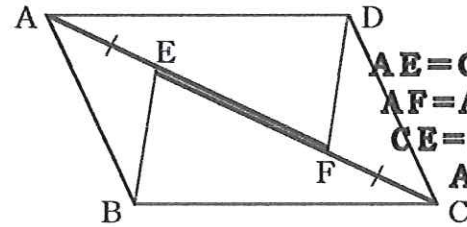


平行四辺形だから

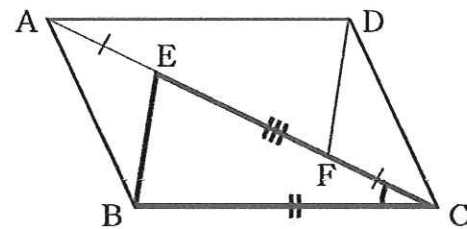
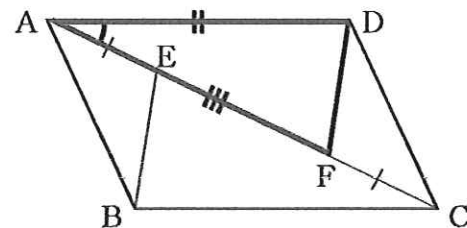


$AD = BC$

$\angle DAC = \angle BCA$



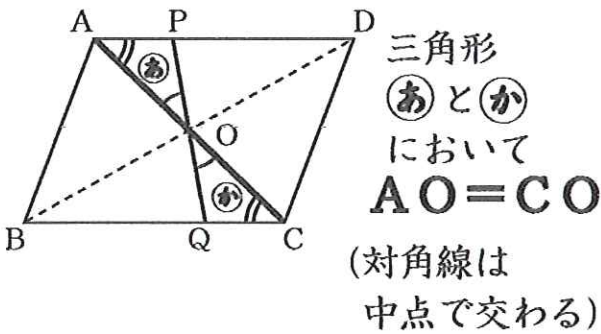
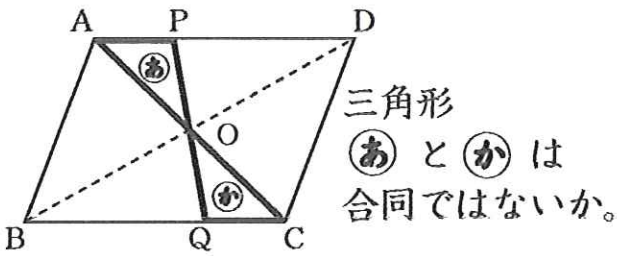
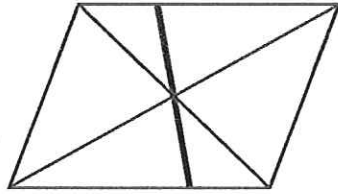
$AE = CF$ だから
 $AF = AC - CF$
 $CE = AC - AE$
 $AF = CE$



$\triangle ADF \equiv \triangle CBE$

平行四辺形の

対角線の
交点を通る
直線を考える。



$$\angle PAO = \angle QCO$$

(平行線の錯角は等しい)

$$\angle POA = \angle QOC$$

(対頂角は等しい)

三角形の合同条件

1辺と両端の角が
それぞれ等しいとき
三角形は合同

により

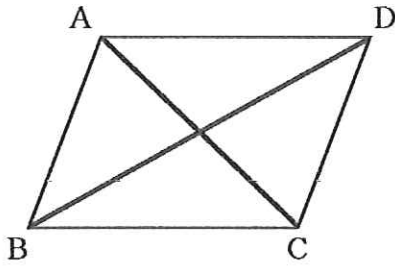
$$\triangle POA \equiv \triangle QOC$$

よって対応する辺

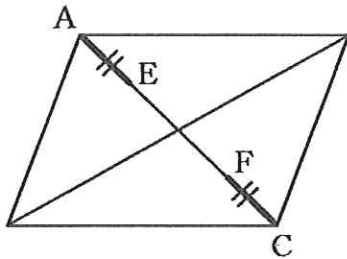
$$PO = QO$$

ステップ3の1を使って証明する。

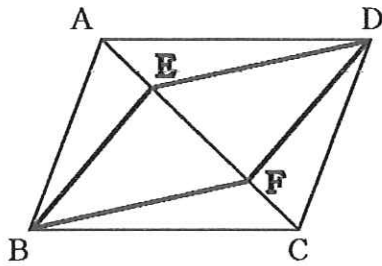
平行四辺形の対角線上に



$AE = CF$ となるような
点E、Fをとるとき

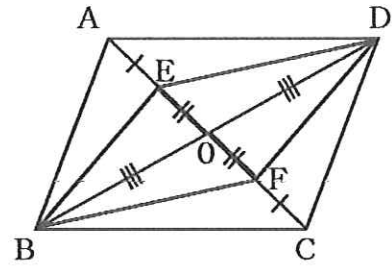


四角形 $EBFD$ は
平行四辺形である。



平行四辺形になるための
条件は
5つあった。
そのどれがつかえるのか
考えよう。

証明 その1



$$BO = DO$$

と言える。

平行四辺形の
対角線は中点で交わるので。

あと

$$EO = FO$$

と言えれば。

四角形 $EBFD$ は
平行四辺形と言える。

これもまた、
元の平行四辺形から

$$AO = CO \text{ である}$$

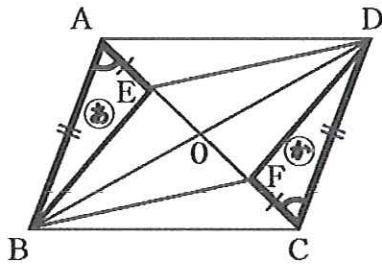
$$\rightarrow AE = CF \text{ (と決めたゆえ)}$$

差を
とれば $EO = FO$

対角線が中点で交わるから
平行四辺形と言える。

証明 その2

三角形②と③をくらべる



$AB=CD$ (平行四辺形だから対辺は等しい)

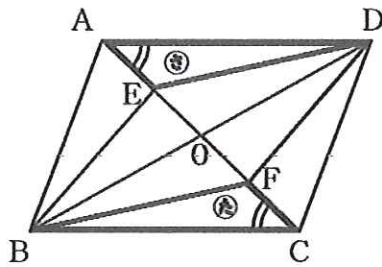
$AE=CF$ (等しくとった)

$\angle BAE=\angle DCF$ ($AB\parallel DC$ だから錯角は等しい)

上記3つにより

$\triangle ABE\equiv\triangle DCF$

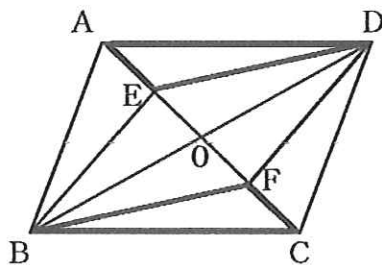
それゆえ $BE=DF$. . . ①



同様にして

$\triangle ADE\equiv\triangle BCF$

それゆえ $DE=BF$. . . ②

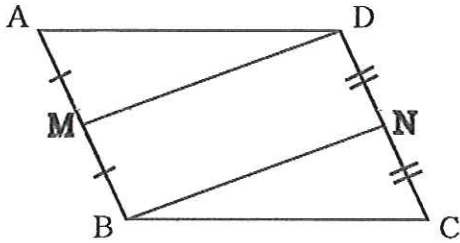


①、②より

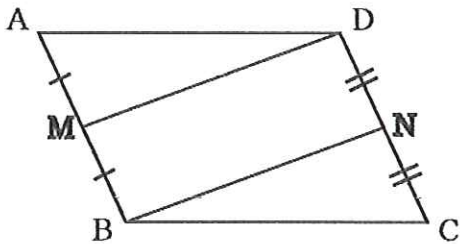
2組の対辺が等しいので

四角形EBFDは平行四辺形

$\square ABCD$ の向かいあう辺
 AB 、 BC の中点をそれぞれ
 M 、 N とするとき



四角形 $MBND$ は
 平行四辺形であることを
 証明せよ。



平行四辺形だから

$$AB = CD$$

それぞれ2分の1である

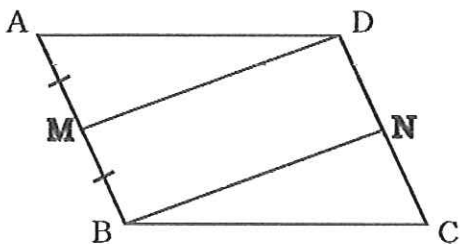
$$MB \text{ と } ND \text{ も等しい。}$$

平行四辺形だから

$$AB // DC$$

それゆえ

$$MB // ND$$

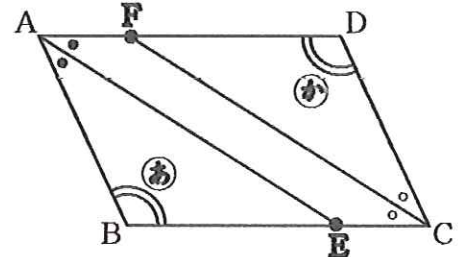


対辺 MB と ND が

平行で等しいから

$\square MBND$ は平行四辺形である。

$\square ABCD$ で
 $\angle A$ 、 $\angle C$ の二等分線と
 BC 、 AD との交点をそれぞれ
 E 、 F とすると
 $AE = CF$ であると言える。



なぜなら
 三角形(あ)と(か)をくらべると
 平行四辺形だから

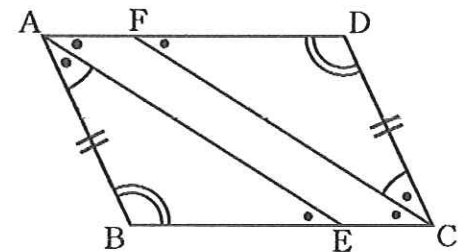
$$AB = CD$$

$$\angle B = \angle D$$

$$\angle A = \angle C$$

だからその半分も等しい。

$$\angle BAE = \angle DCF$$



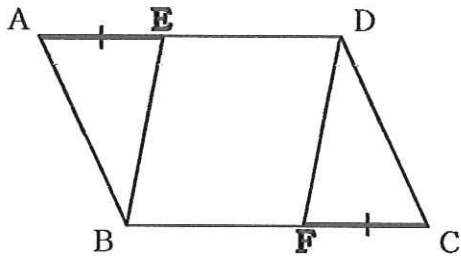
1辺と両端の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABE \equiv \triangle CDF$$

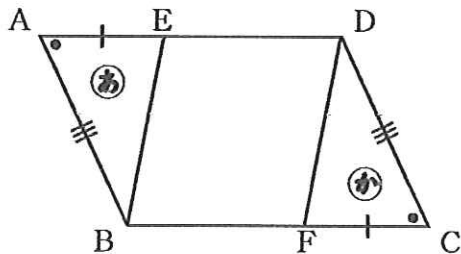
それゆえ

$$AE \equiv CF$$

□ABCDの辺AD、BC上に
AE=CFとなるように
 点E、Fをとるとき



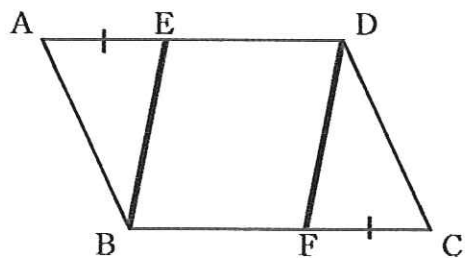
BE=DFである。



なぜなら

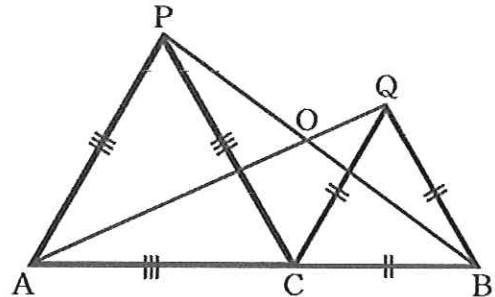
三角形**あ**と**か**をくらべると
 平行四辺形だから**AB=CD**
 平行四辺形だから**∠A=∠C**
 決めたのだから **AE=CF**

2辺とその間の角が
 それぞれ等しいので
 三角形**あ**と**か**は合同

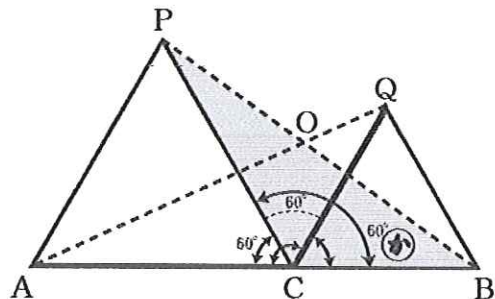
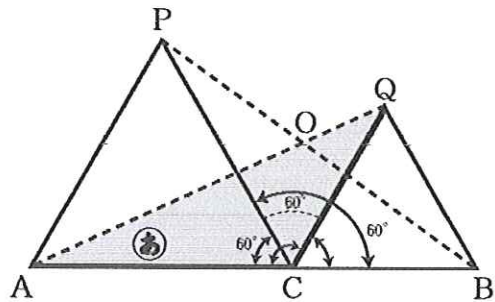


対応する**BF=DF**

線分AB上に点Cをとり
AC、BCを1辺とする
正三角形を書くと
AQ=BPである



三角形**あ**と**か**をくらべると ※



※ **AC=PC**
CQ=CB
∠ACQ=∠BCP

(それぞれ60°に同じく
 ∠PCQを加えた角だから)

2辺とその間の角が
 それぞれ等しいので

あ ≡ か

それゆえ

AQ=BP