xの増加量が下に示す場合の変化の割合を求めなさい。

xの増加量＼2次関数	$y=x^2$	$y=2x^2$	$y=3x^2$
0から1まで	$\frac{1^2-0^2}{1-0}$ $=\frac{1}{1}$ $=1$	$\frac{2\times1^2-2\times0^2}{1-0}$ $=\frac{2-0}{1-0}$ $=\frac{2}{1}$ $=2$	$\frac{3\times1^2-3\times0^2}{1-0}$ $=\frac{3-0}{1-0}$ $=\frac{3}{1}$ $=3$
1から2まで	$\frac{2^2-1^2}{2-1}$ $=\frac{4-1}{2-1}$ $=\frac{3}{1}$ $=3$	$\frac{2\times2^2-2\times1^2}{2-0}$ $=\frac{8-2}{2-1}$ $=\frac{6}{1}$ $=6$	$\frac{3\times2^2-3\times1^2}{2-0}$ $=\frac{12-3}{2-1}$ $=\frac{9}{1}$ $=9$
2から3まで	$\frac{3^2-2^2}{3-2}$ $=\frac{9-4}{3-2}$ $=\frac{5}{1}$ $=5$	$\frac{2\times3^2-2\times2^2}{3-2}$ $=\frac{18-8}{3-2}$ $=\frac{10}{1}$ $=10$	$\frac{3\times3^2-3\times2^2}{3-2}$ $=\frac{27-12}{3-2}$ $=\frac{15}{1}$ $=15$
3から4まで	$\frac{4^2-3^2}{4-3}$ $=\frac{16-9}{4-3}$ $=\frac{7}{1}$ $=7$	$\frac{2\times4^2-2\times3^2}{4-3}$ $=\frac{32-18}{4-3}$ $=\frac{14}{1}$ $=14$	$\frac{3\times4^2-3\times3^2}{4-3}$ $=\frac{48-27}{4-3}$ $=\frac{21}{1}$ $=21$

何か法則は見つからないか。

それぞれの式について、

xの増加量が下に示す場合の

変化の割合を求めなさい。

2次関数 / xの増加量	$y=x^2$	$y=\frac{1}{2}x^2$	$y=\frac{1}{3}x^2$
0から1まで			
1から2まで			
2から3まで			
3から4まで			

なにか　法則性は見つからないか。

$y=2x^2$ のときの

$\boxed{x\text{の増加量}}$ 分の $\boxed{y\text{の増加量}}$ を求める。

下の式をよく観察しなさい。

xの値が
3から5まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2\cdot 5^2-2\cdot 3^2}{5-3}$$
$$=\frac{2(5+3)(5-3)}{5-3}$$
$$=2(5+3)$$

xの値が
3から8まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2\cdot 8^2-2\cdot 3^2}{8-3}$$
$$=\frac{2(8+3)(8-3)}{8-3}$$
$$=2(8+3)$$

xの値が
bからcまで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{2\cdot c^2-2\cdot b^2}{c-b}$$
$$=\frac{2(c+b)(c-b)}{c-b}$$
$$=2(c+b)$$

$y=3x^2$について同じことを試してみなさい。

$y=3x^2$ のときの
$\boxed{x\text{の増加量}}$ 分の $\boxed{y\text{の増加量}}$ を求める。

xの値が
3から5まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{3\cdot5^2-3\cdot3^2}{5-3}$$
$$=\frac{3(5+3)(5-3)}{5-3}$$
$$=3(5+3)$$

xの値が
3から8まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{3\cdot8^2-3\cdot3^2}{8-3}$$
$$=\frac{3(8+3)(8-3)}{8-3}$$
$$=3(8+3)$$

xの値が
bからcまで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{3\cdot c^2-3\cdot b^2}{c-b}$$
$$=\frac{3(c+b)(c-b)}{c-b}$$
$$=3(c+b)$$

$y=5x^2$について同じことを試してみなさい。

$y=5x^2$ のときの

$\boxed{x\text{の増加量}}$ 分の $\boxed{y\text{の増加量}}$ を求める。

xの値が
3から5まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{5\cdot5^2-5\cdot3^2}{5-3}$$
$$=\frac{5(5+3)(5-3)}{5-3}$$
$$=5(5+3)$$

xの値が
3から8まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{5\cdot8^2-5\cdot3^2}{8-3}$$
$$=\frac{5(8+3)(8-3)}{8-3}$$
$$=5(8+3)$$

xの値が
bからcまで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{5\cdot c^2-5\cdot b^2}{c-b}$$
$$=\frac{5(c+b)(c-b)}{c-b}$$
$$=5(c+b)$$

$y=ax^2$について同じことを試してみなさい。

$y=ax^2$ のときの
$\boxed{x\text{の 増加量}}$ 分の $\boxed{y\text{の増加量}}$ を求める。

xの値が
3から5まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{a\times5^2-a\times3^2}{5-3}$$
$$=\frac{a(5^2-3^2)}{5-3}$$
$$=\frac{a(5+3)\_(5-3)}{5-3}$$
$$=a\,(5+3)$$

xの値が
3から8まで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{a\times8^2-a\times3^2}{8-3}$$
$$=\frac{a(8^2-3^2)}{8-3}$$
$$=\frac{a(8+3)\_(8-3)}{8-3}$$
$$=a\,(8+3)$$

xの値が
bからcまで増加した時

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{a\times c^2-a\times b^2}{c-b}$$
$$=\frac{a(c^2-b^2)}{c-b}$$
$$=\frac{a(c+b)\_(a-b)}{c-b}$$
$$=a\,(c+b)$$

左の文と右の式は同じ意味を示す。

y は x に正比例する	$\Leftrightarrow$	$y=ax$
y は x の1次関数である	$\Leftrightarrow$	$y=ax+b$
y は x の2乗に比例する	$\Leftrightarrow$	$y=ax^2$

覚えて言いなさい。

$\boxed{y=ax}$ や $\boxed{y=ax+b}$ の場合

$\boxed{\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}}$ すなわち $\boxed{\text{変化の割合は}}$ 変化しないが

$y=ax^2$ の場合

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ すなわち 変化の割合は

変化する。

関数 $y=x^2$ について

変化の割合を求めなさい。

サ -1 から 0 まで
$=-1$

シ -2 から -1 まで
$=-3$

ス -3 から -2 まで
$=-5$

セ -4 から -3 まで
$=-7$

ソ -5 から -4 まで
$=-9$

ア 0 から 1 まで
$=1$

イ 1 から 2 まで
$=3$

ウ 2 から 3 まで
$=5$

エ 3 から 4 まで
$=7$

オ 4 から 5 まで
$=9$

タ -2 から 0 まで
$=-2$

チ -3 から -1 まで
$=-4$

カ 0 から 2 まで
$=2$

キ 1 から 3 まで
$=4$

$y=x^2$ における変化の割合

$-7 \quad -5 \quad -3 \quad -1 \quad +1$

y	16	9	4	1	0	1
x	-4	-3	-2	-1	0	1

$+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1 \quad +1$

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} \qquad \frac{-7}{1} \qquad \frac{-5}{1} \qquad \frac{-3}{1} \qquad \frac{-1}{1} \qquad \frac{1}{1}$$

$$=-7 \qquad =-5 \qquad =-3 \qquad =-1 \qquad =1$$

$$\boxed{y = x^2}$$

	x	x^2	y	
	-4	$(-4)^2$	16	
ア 1				カ −7
	-3	$(-3)^2$	9	
イ 1				キ −5
	-2	$(-2)^2$	4	
ウ 1				ク −3
	-1	$(-1)^2$	1	
エ 1				ケ −1
	0	0^2	0	

上記の内容を文章で表すと、次の通り

x （ア）の値が
−4 から −3に
1 増加すると

y （カ）の値は
16 から 9に
−7 増加する。

このとき

変化の割合すなわち

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ は

$\dfrac{-7}{1} = -7$ である。

「−3から−2の場合など」についても同様に示せ。

関数 $y=-x^2$ について

xの増加が

次の　〜チ の場合の**変化の割合**を求めなさい。

ア 0 から 1 まで

$$=\frac{-1^2-0^2}{1-0}=\frac{-1}{1}$$
$$=-1$$

イ 1 から 2 まで

$$=\frac{-2^2-(-1^2)}{2-1}=\frac{-4+1}{1}$$
$$=-3$$

ウ 2 から 3 まで

$$=\frac{-3^2-(-2^2)}{3-2}=\frac{-5}{1}$$
$$=-5$$

エ 3 から 4 まで

$$=\frac{-4^2-(-3^2)}{4-3}=\frac{-7}{1}$$
$$=-7$$

オ 4 から 5 まで

$$=\frac{-5^2-(-4^2)}{5-4}=\frac{-9}{1}$$
$$=-9$$

カ 0 から 2 まで

$$=\frac{-2^2-(-0^2)}{2-0}=\frac{-4}{2}$$
$$=-2$$

キ 1 から 3 まで

$$=\frac{-3^2-(-1^2)}{3-1}=\frac{-9+1}{2}$$
$$=-4$$

サ −1 から 0 まで

$$=\frac{(-0^2)-\{-(-1)^2\}}{1-(-0)}$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

シ −2 から −1 まで

$$=\frac{-(-0)^2-\{-(-2)^2\}}{(-1)-(-2)}$$
$$=\frac{1+4}{1}=3$$

ス −3 から −2 まで

$$=\frac{-(-2)^2-\{-(-3)^2\}}{(-2)-(-3)}$$
$$=\frac{\{-4\}-\{-9\}}{1}=5$$

セ −4 から −3 まで

ソ −5 から −4 まで

タ −2 から 0 まで

チ −3 から −1 まで

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

① -5 から -4 まで

② -4 から -3 まで

③ -3 から -2 まで

④ -2 から -1 まで

⑤ -1 から 0 まで

⑥ 0 から 2 まで

⑦ 2 から 3 まで

⑧ 3 から 4 まで

⑨ 4 から 5 まで

⑩ 0 から 2 まで

$$y=\frac{1}{3}x^2$$

① -5 から -4 まで

② -4 から -3 まで

③ -3 から -2 まで

④ -2 から -1 まで

⑤ -1 から 0 まで

⑥ 0 から 2 まで

⑦ 2 から 3 まで

⑧ 3 から 4 まで

⑨ 4 から 5 まで

⑩ 0 から 2 まで

$y=x^2$ のときの

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を求める。

xの増加量分のyの増加量を

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ とあらわすことにする

xの値が
3から5まで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{5^2-3^2}{5-3}$$
$$=\frac{(5+3)(5-3)}{5-3}$$
$$=(5+3)$$

xの値が
3から8まで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{8^2-3^2}{8-3}$$
$$=\frac{(8+3)(8-3)}{8-3}$$
$$=(8+3)$$

xの値が
bからcまで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{c^2-b^2}{c-b}$$
$$=\frac{(c+b)(c-b)}{c-b}$$
$$=(c+b)$$

$y = 2x^2$ のときの

xの増加量分のyの増加量を求める。

xの増加量分のyの増加量を

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ とあらわすことにする

xの値が
3から5まで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2\cdot 5^2 - 2\cdot 3^2}{5-3}$$

$$= \frac{2(5+3)(5-3)}{5-3}$$

$$= 2(5+3)$$

xの値が
3から8まで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2\cdot 8^2 - 2\cdot 3^2}{8-3}$$

$$= \frac{2(8+3)(8-3)}{8-3}$$

$$= 2(8+3)$$

xの値が
bからcまで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2\cdot c^2 - 2\cdot b^2}{c-b}$$

$$= \frac{2(c+b)(c-b)}{c-b}$$

$$= 2(c+b)$$

$y = ax^2$ のときの
xの増加量分のyの増加量を求める。

xの増加量分のyの増加量を

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ とあらわすことにする

xの値が

3から5まで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{a\cdot 5^2 - a\cdot 3^2}{5-3}$$

$$= \frac{a(5+3)(5-3)}{5-3}$$

$$= a(5+3)$$

xの値が

3から8まで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{a\cdot 8^2 - a\cdot 3^2}{8-3}$$

$$= \frac{a(8+3)(8-3)}{8-3}$$

$$= a(8+3)$$

xの値が

bからcまで増加した時の$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{a\cdot c^2 - a\cdot b^2}{c-b}$$

$$= \frac{a(c+b)(c-b)}{c-b}$$

$$= a(c+b)$$

地球上の高い所から、空気の抵抗を無視できるような物体を落下させると x秒後までの **落下距離** ymは

およそ次のような式で求められることが分かっています。

$$\boxed{y = 5x^2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7秒
y	0	5	20	45	80	125	180	245m

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$	$\dfrac{5\text{m}}{1秒}$	$\dfrac{15\text{m}}{1秒}$	$\dfrac{25\text{m}}{1秒}$	$\dfrac{35\text{m}}{1秒}$	$\dfrac{45\text{m}}{1秒}$	$\dfrac{55\text{m}}{1秒}$	$\dfrac{65\text{m}}{1秒}$

上の値の求め方を式に示す。

0秒から1秒までの落下距離

$$\left(\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{5\cdot 1^2 - 5\cdot 0^2}{1-0} \qquad \right)$$

1秒から2秒までの落下距離

$$\left(\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{5\cdot 2^2 - 5\cdot 1^2}{2-1} \qquad \right)$$

２秒から2.1秒後まで

２秒から2.01秒後まで

２秒から2.001秒後まで　などについて考えてみる。

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{5\cdot 2.1^2-5\cdot 2^2}{2.1-2}$$

$$= \frac{5(2.1+2)(2.1-2)}{2.1-2}$$

$$= 5(2.1+2)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{5\cdot 2.01^2-5\cdot 2^2}{2.01-2}$$

$$= \frac{5(2.01+2)(2.01-2)}{2.01-2}$$

$$= 5(2.01+2)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{5\cdot 2.001^2-5\cdot 2^2}{2.001-2}$$

$$= \frac{5(2.001+2)(2.001-2)}{2.001-2}$$

$$= 5(2.001+2)$$

２秒からの時間が小さくなれば、

ほとんど　$5\times2\times2$　となる。

$y=5x^2$ のときの

b秒後からc秒後までの 平均秒速

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{5\cdot c^2 - 5\cdot b^2}{c-b}$$

$$= \frac{5(c^2-b^2)}{c-b}$$

$$= \frac{5(c+b)(c-b)}{c-b}$$

$$= 5(c+b)$$

$$= 5(b+c)$$