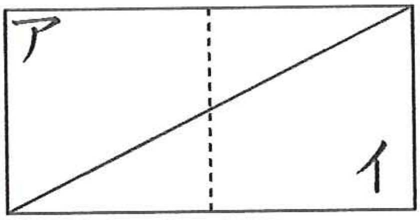
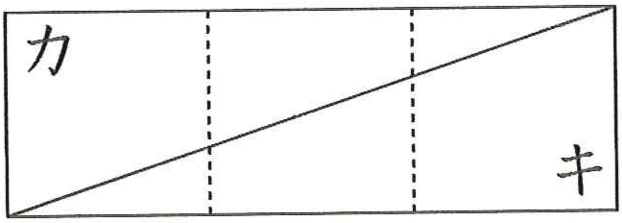
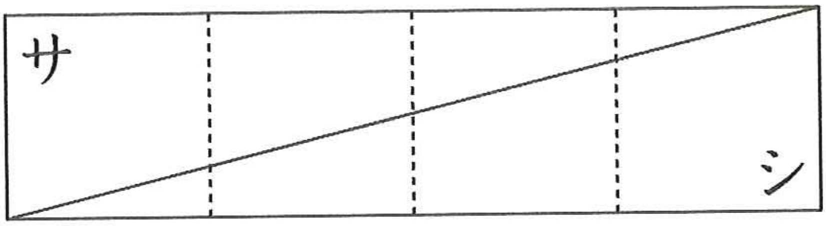
図の**直角三角形**の大きさを方眼の数で示しなさい。



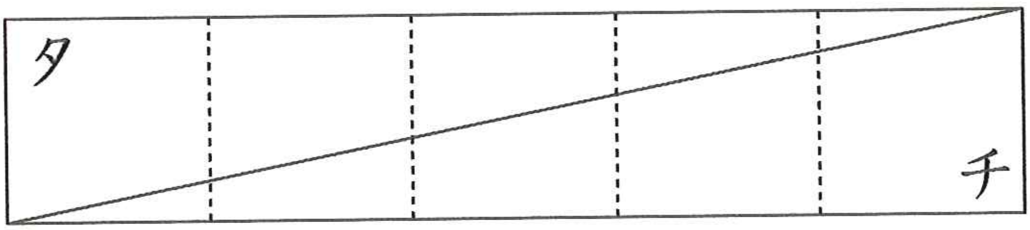
$2 \div 2 = 1$



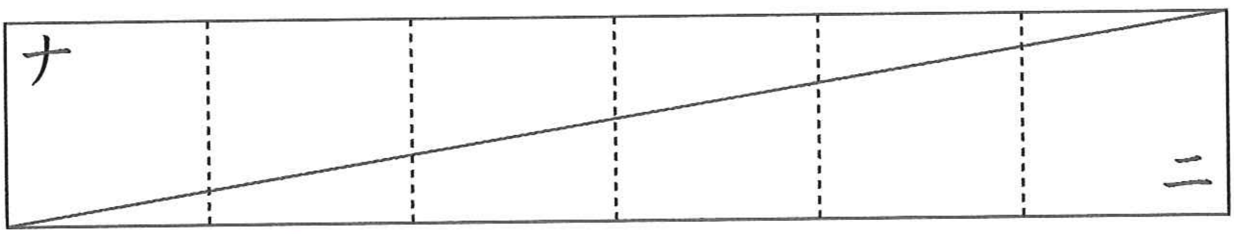
$3 \div 2 = \frac{3}{2}$



$4 \div 2 = 2$

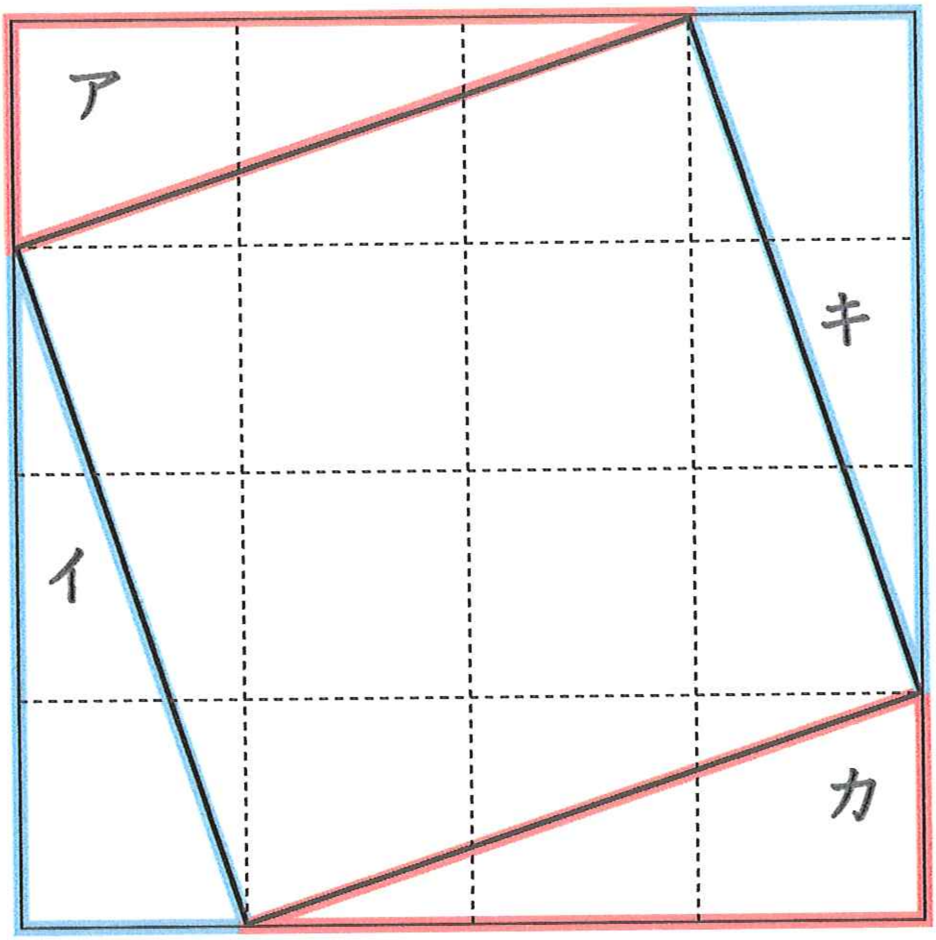


$5 \div 2 = \frac{5}{2}$



$6 \div 2 = 3$

大きい正方形、4つの直角三角形、小さな正方形の大きさを方眼の数で表しなさい。



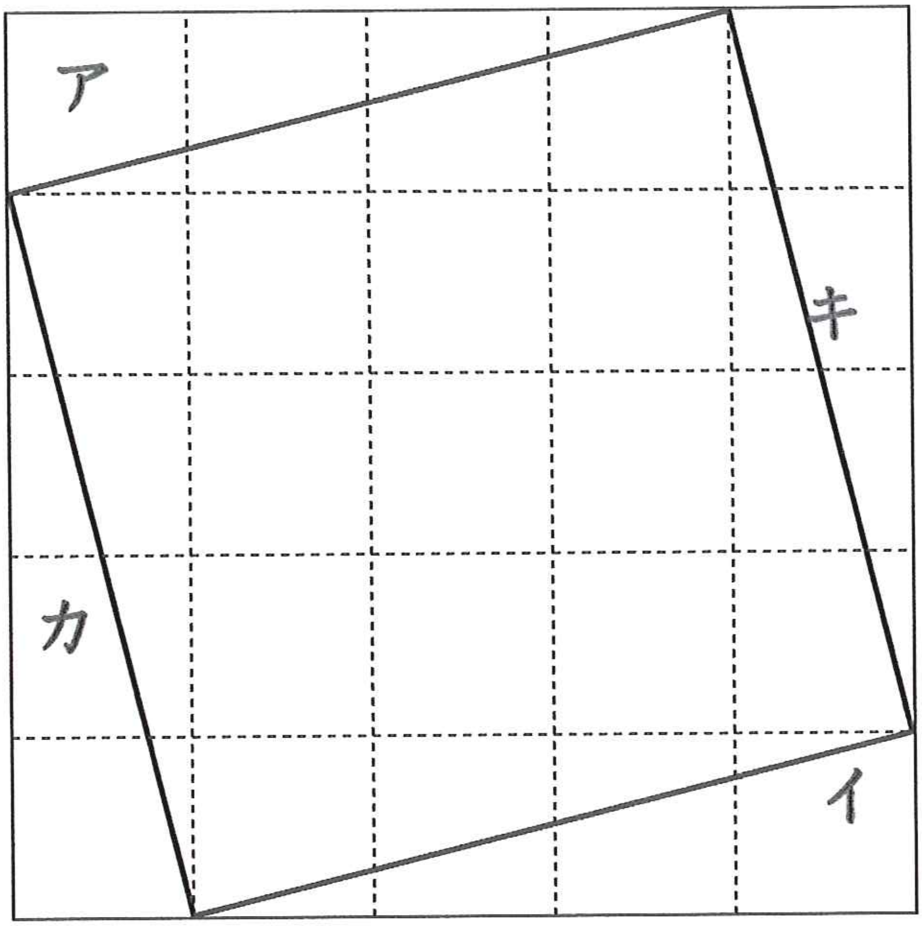
ア＋カ ＝ 3
イ＋キ ＝ 3

外側の
大きい正方形　　16

ア、イ、カ、キ
4つの直角三角形　　6（−

内側の小さい**正方形**　　10

大きい正方形、４つの直角三角形、小さな正方形の大きさを方眼の数で表しなさい。



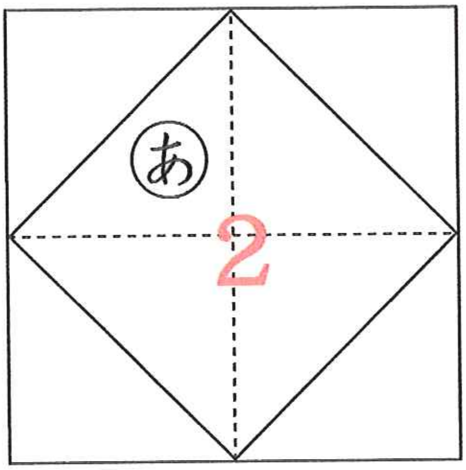
ア＋イ　＝　4
カ＋キ　＝　4
8

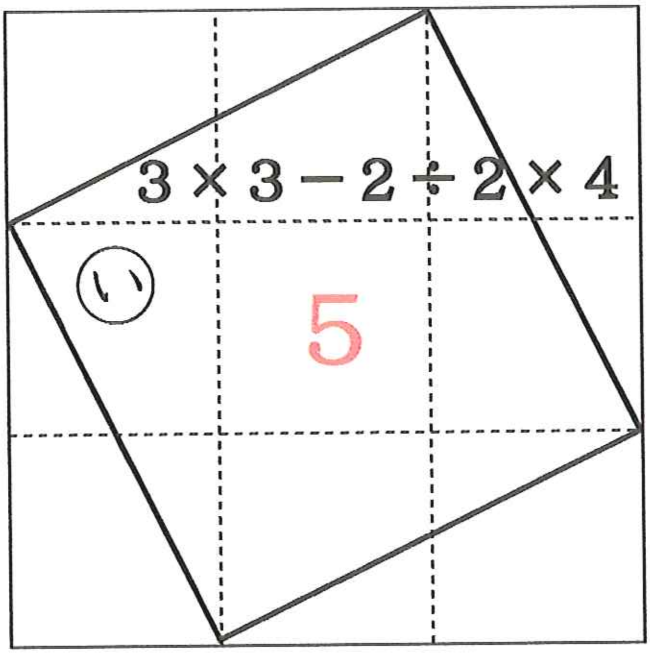
外側の
大きい正方形　　２５

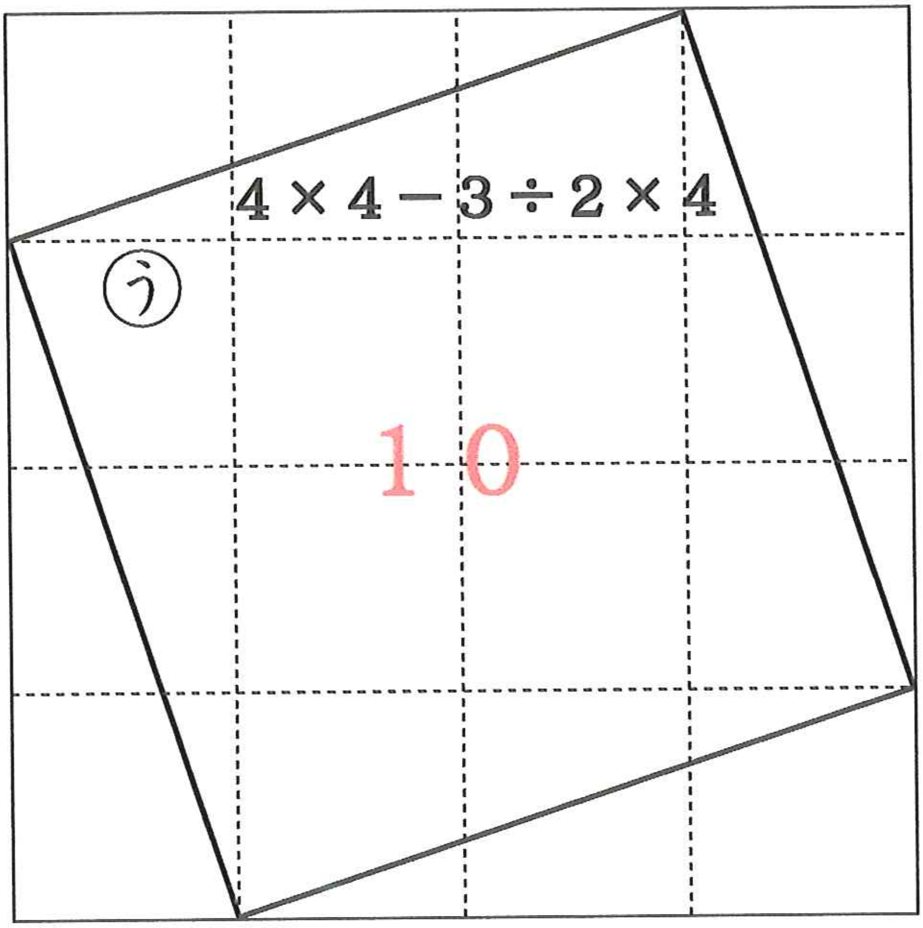
ア、イ、カ、キ
４つの直角三角形　　８（−

内側の小さい**正方形**　　１７

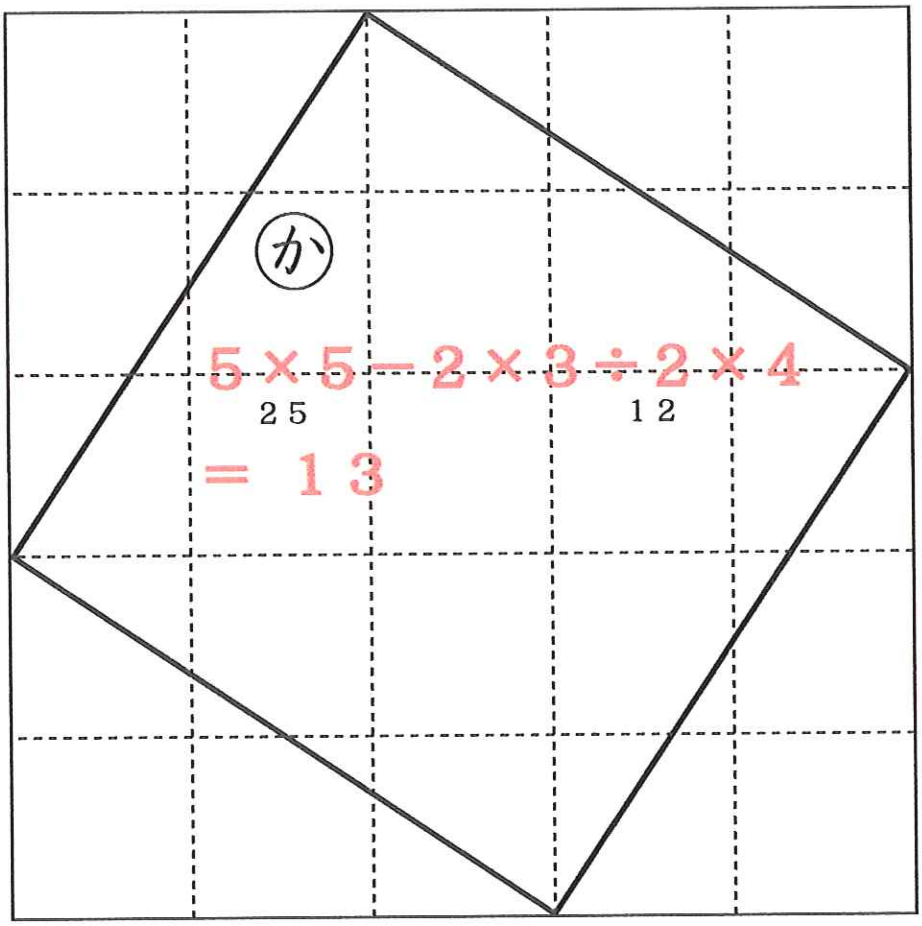
㋐～の正方形の大きさを方眼の数で示しなさい。





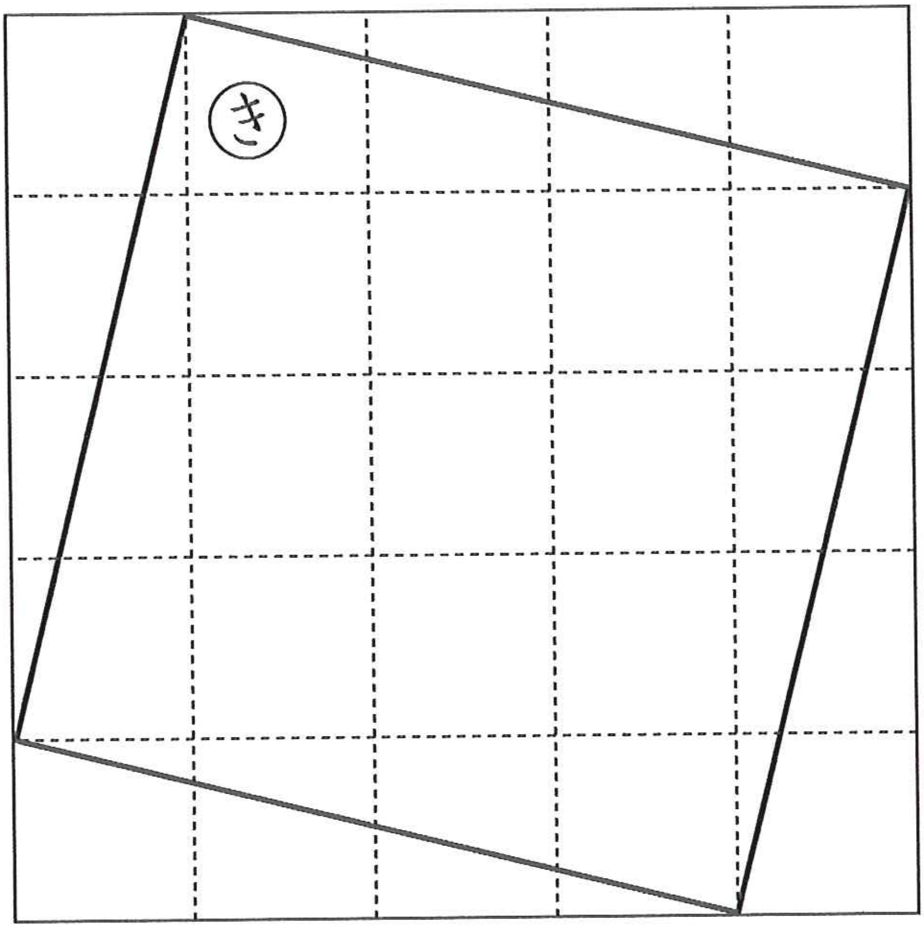


ⓚ の正方形の大きさを方眼の数で示しなさい。



外側の正方形	＝	5×5	＝25
4つの直角三角形	＝	3×4	＝12
内側の正方形	＝	25−12	＝13

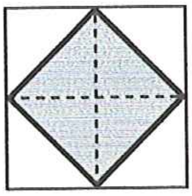
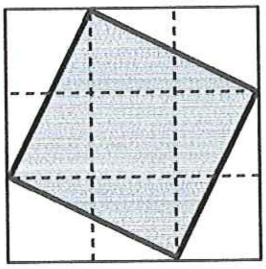
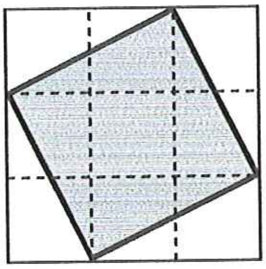
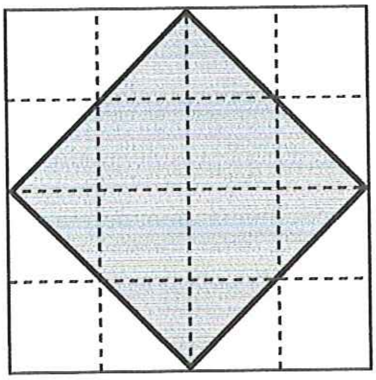
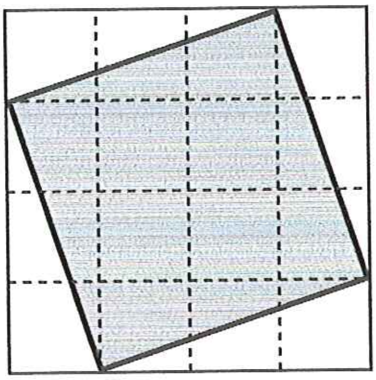
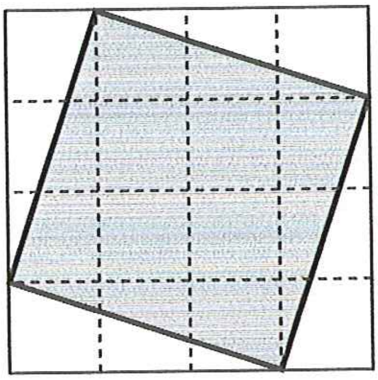
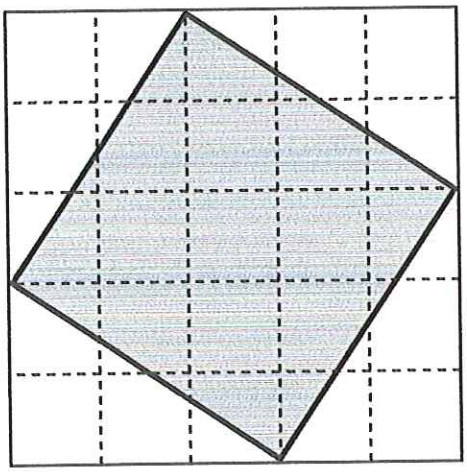
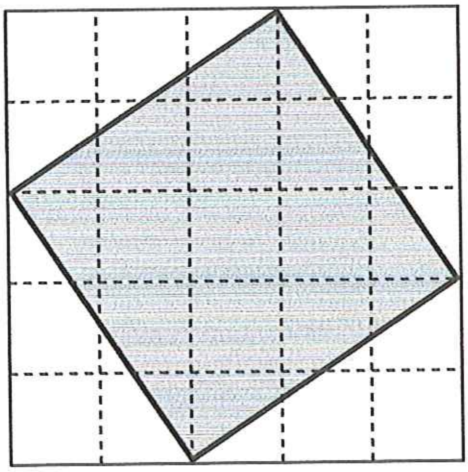
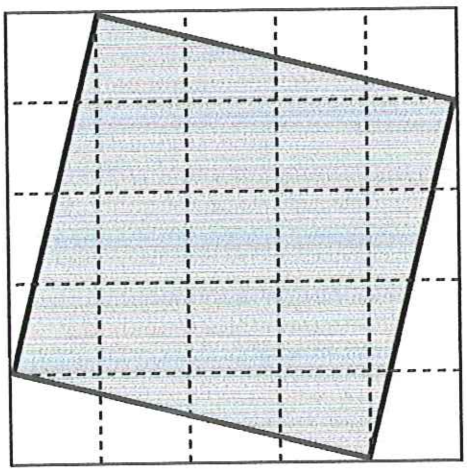
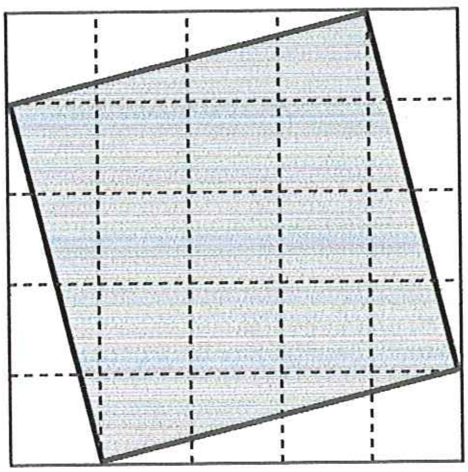
き の正方形の大きさを方眼の数で示しなさい。



外側の正方形	＝	5 × 5	＝	2 5
4 つの直角三角形	＝	2 × 4	＝	8
内側の正方形	＝	25 − 8	＝	1 7

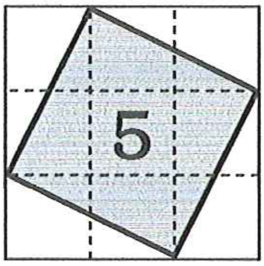
三平方の定理

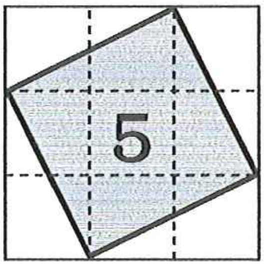
次の網かけした正方形の大きさを方眼の数で表しなさい。

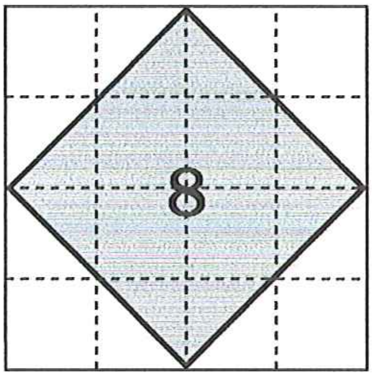











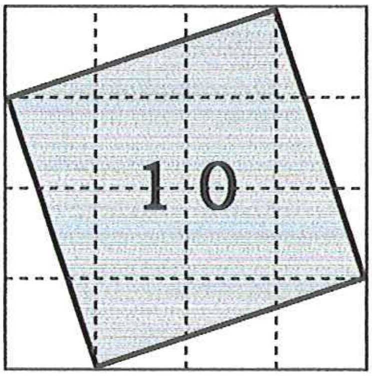
三平方の定理

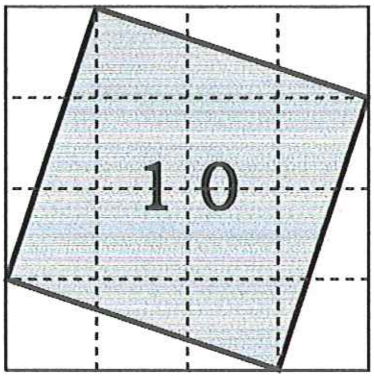
次の網かけした正方形の大きさを方眼の数で表してみます。

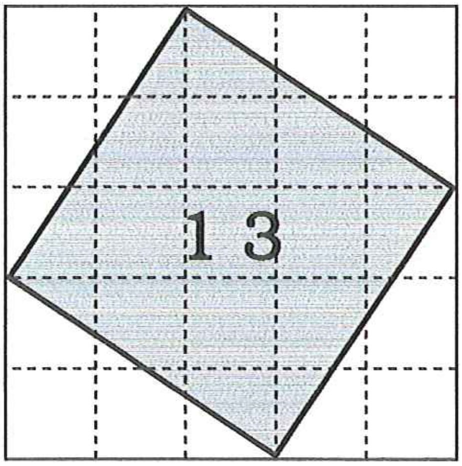


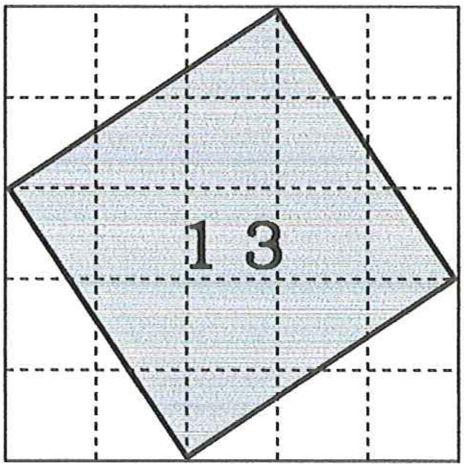


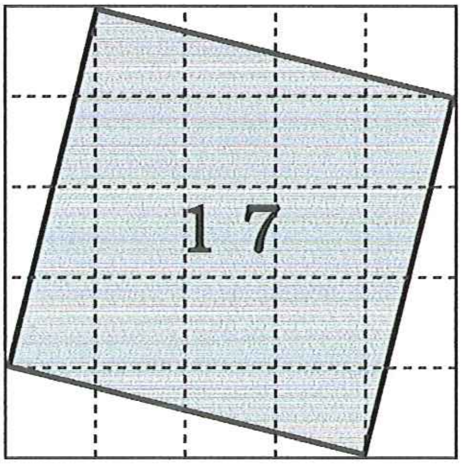


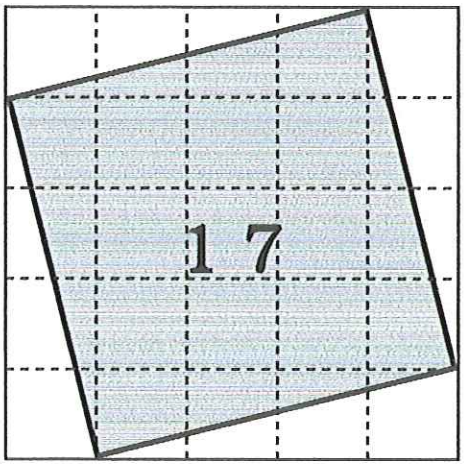




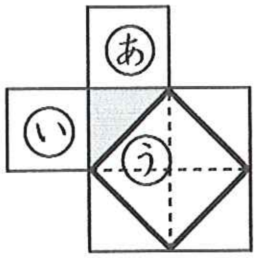


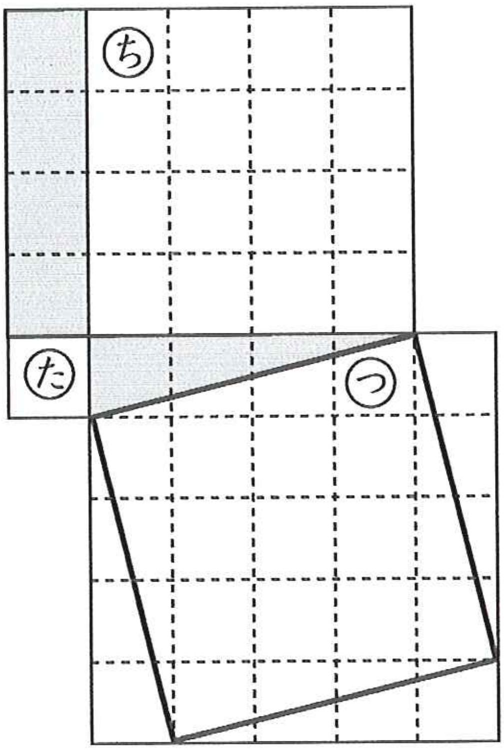


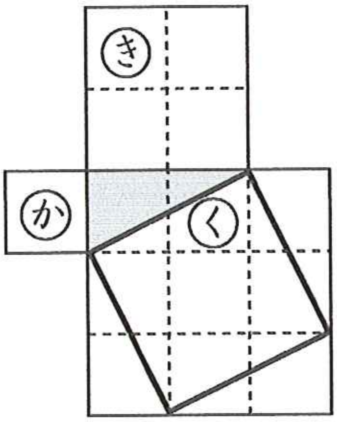


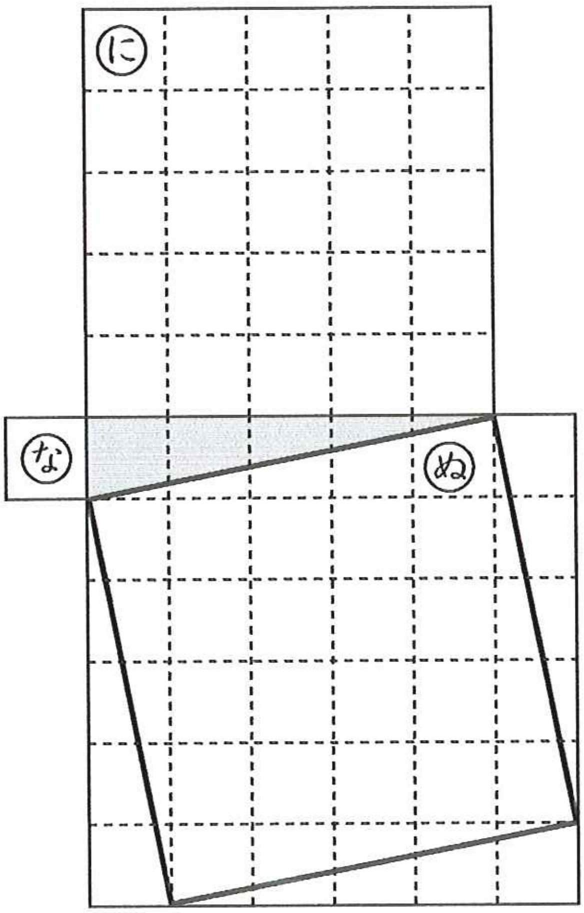


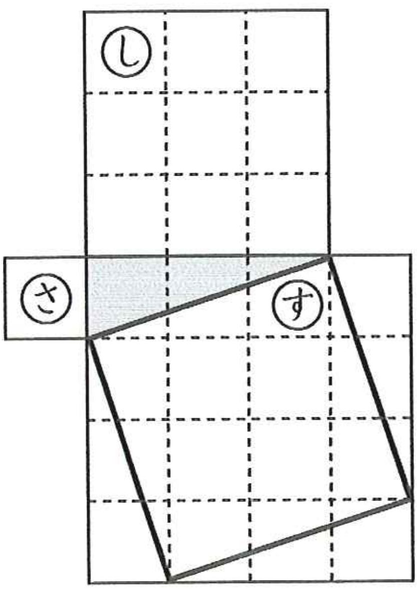
実線でかこまれた、**正方形の面積**を方眼の数で表し
分かったことを述べなさい。



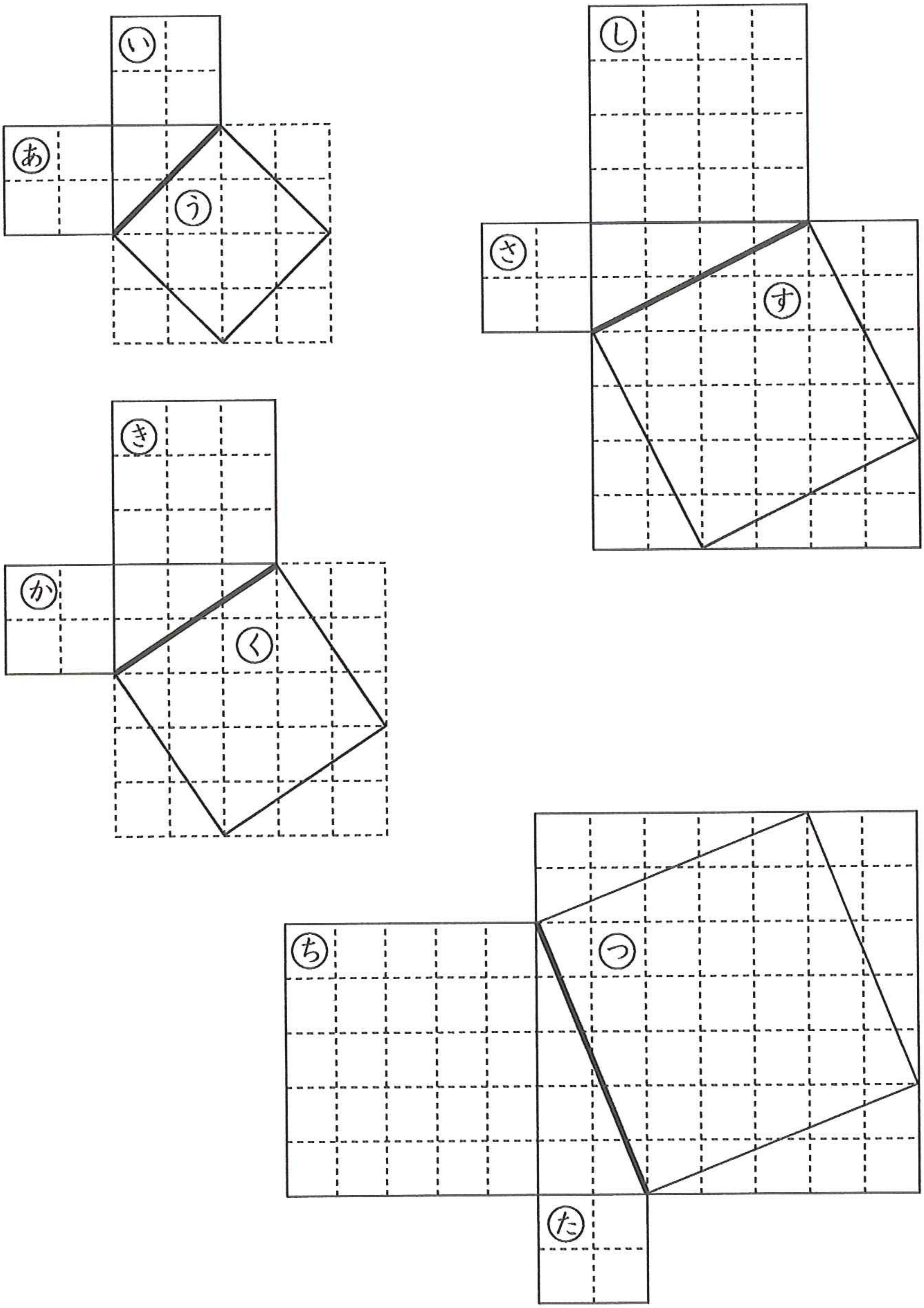




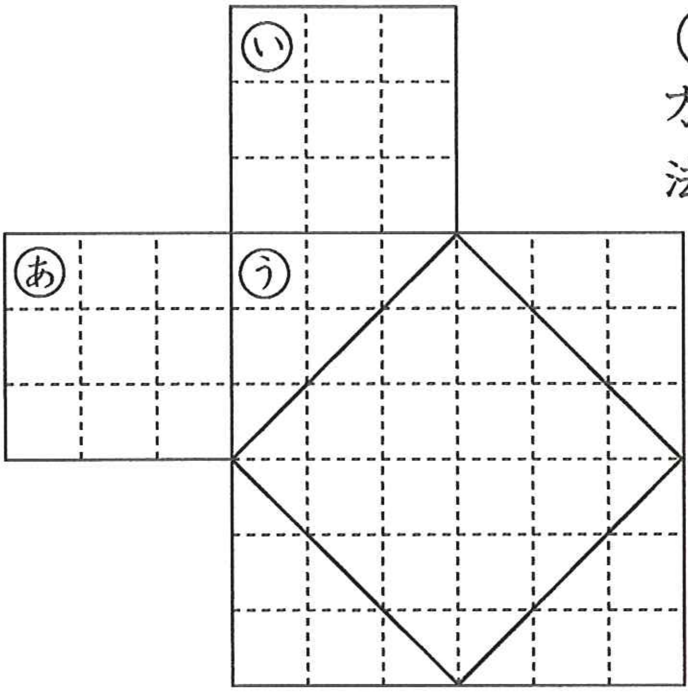


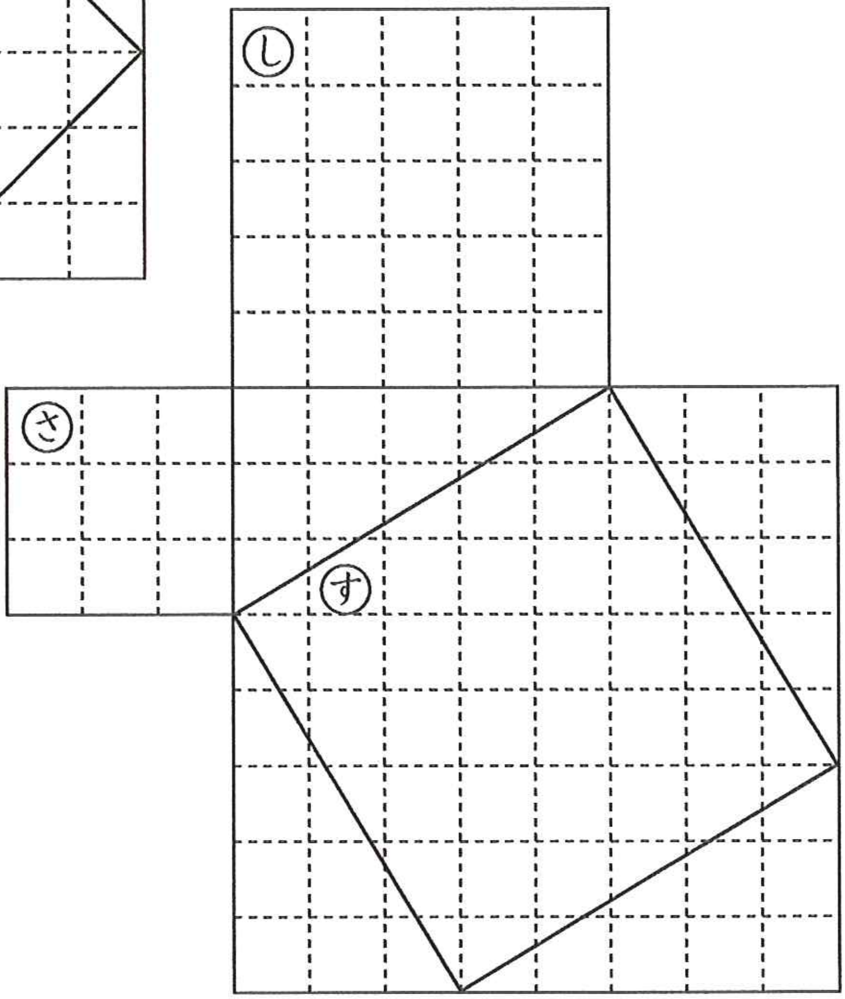


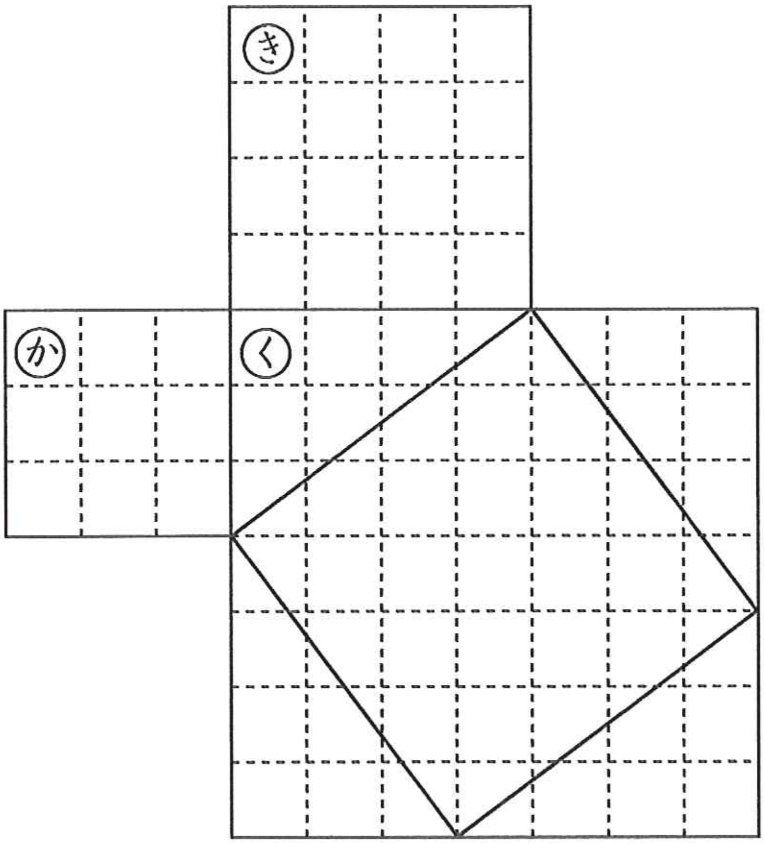
実線でかこまれた、**正方形の面積**を方眼の数で表し
法則を述べなさい。

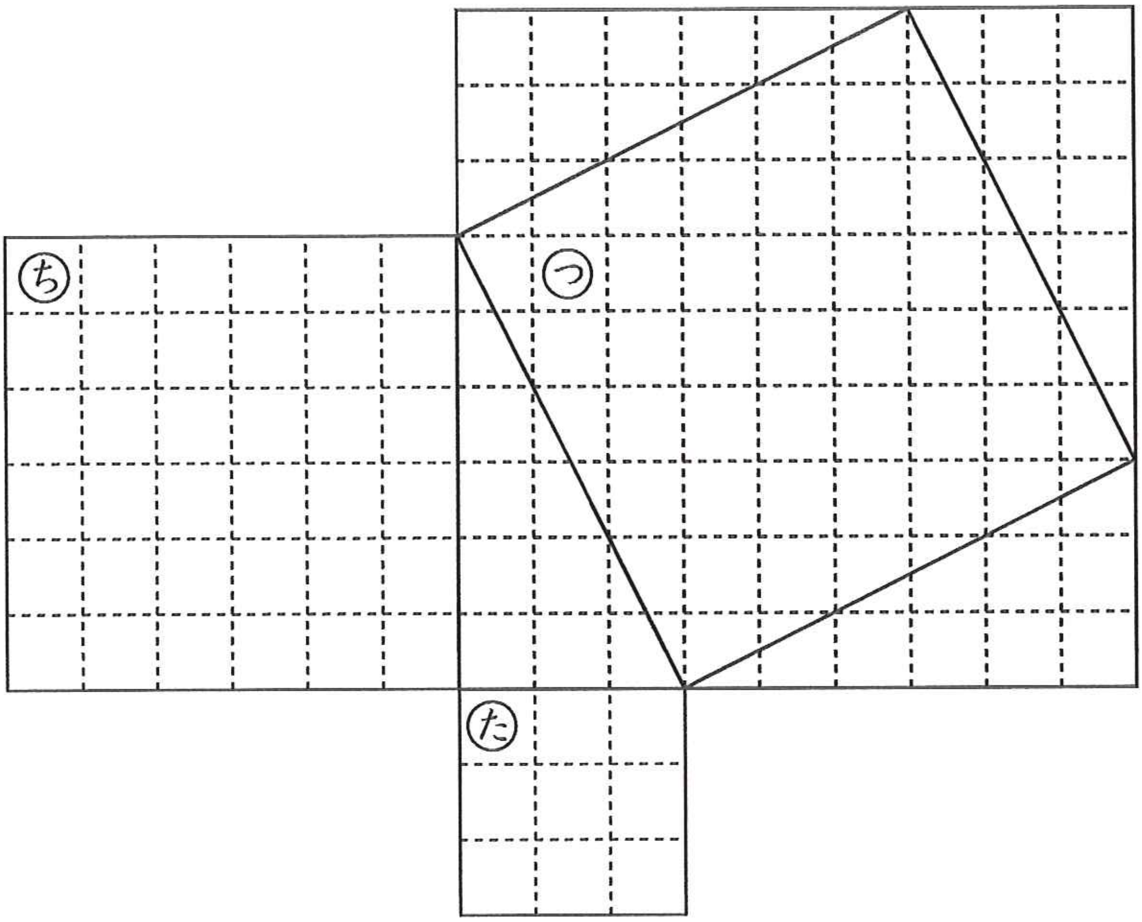


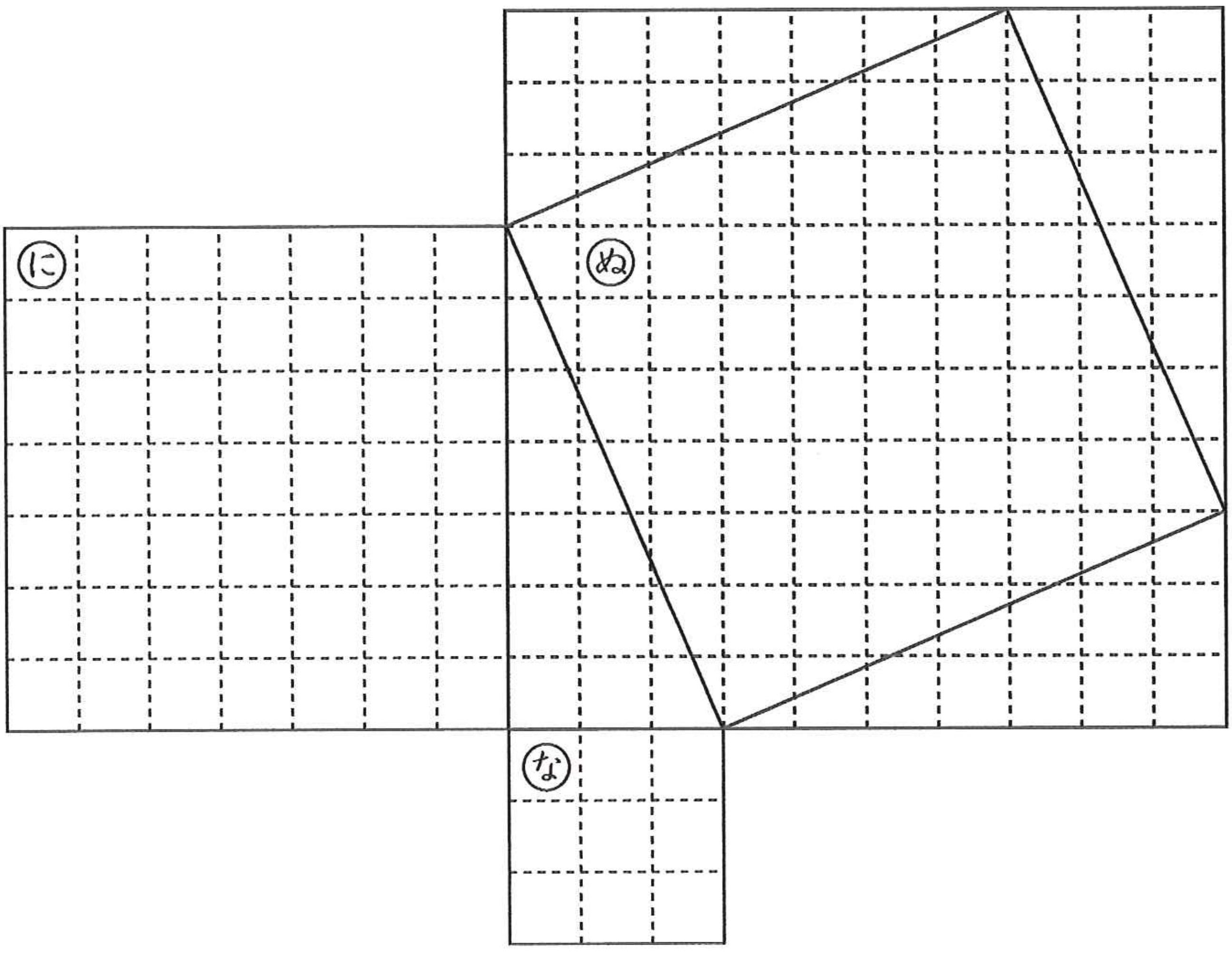
あの正方形の面積を
方眼の数で表し
法則を述べなさい。





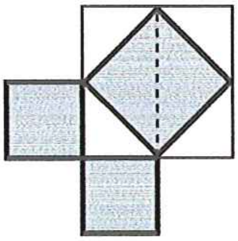


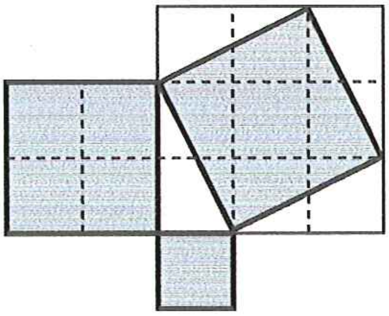

ち
つ
た

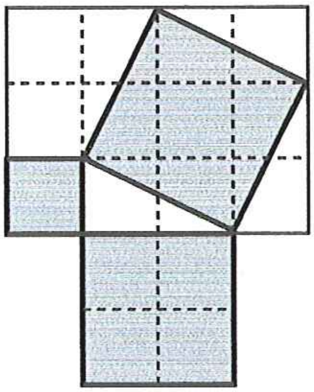

に
ぬ
な

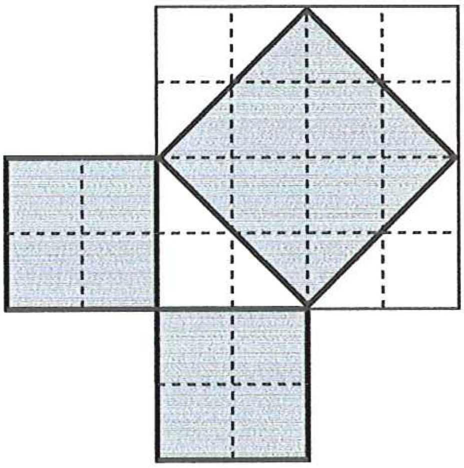
三平方の定理

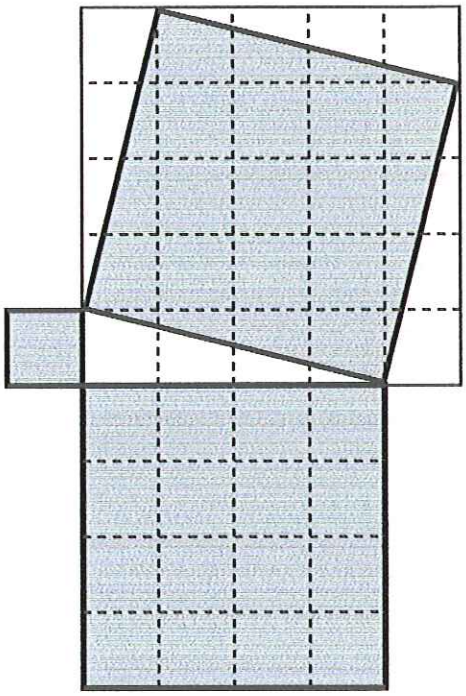
次の網かけした正方形の大きさを、方眼の数で表しなさい。

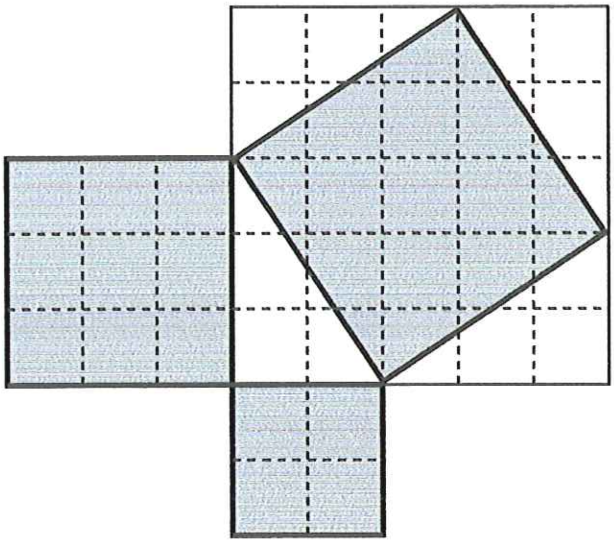






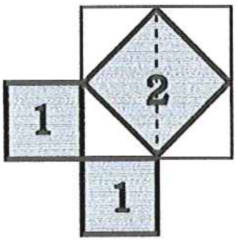


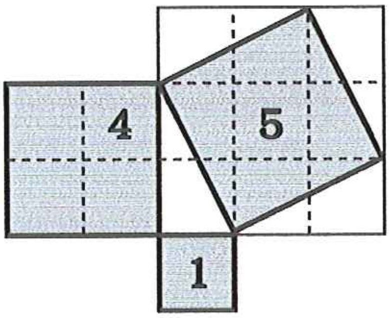


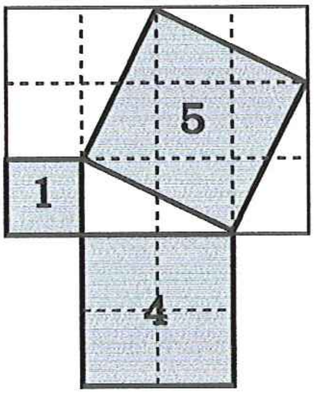


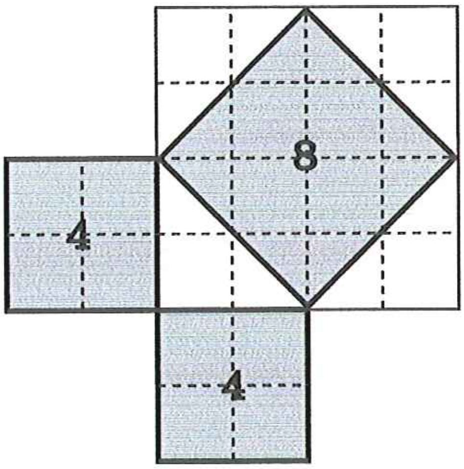
三平方の定理

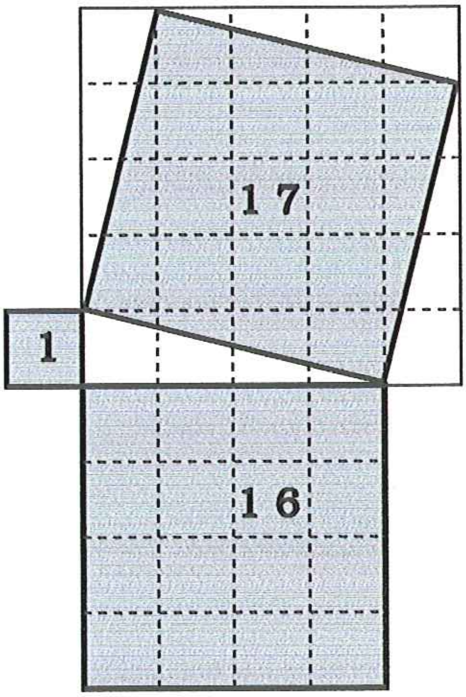
次の網かけした正方形の大きさを、方眼の数で表してみます。
法則性が見つかりますか。

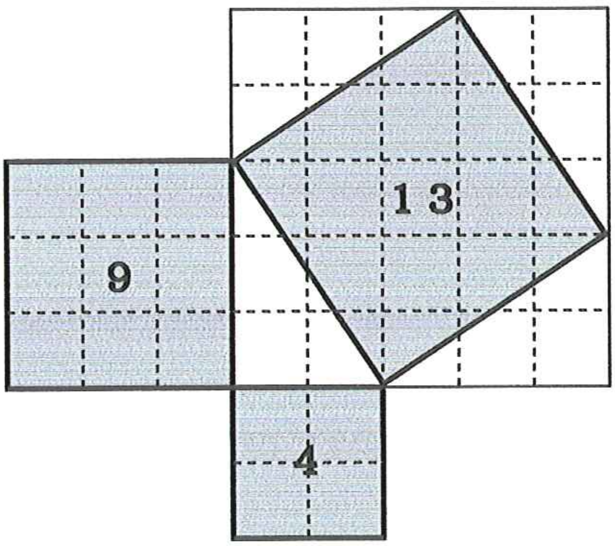












今までみてきたとおり

直角三角形に

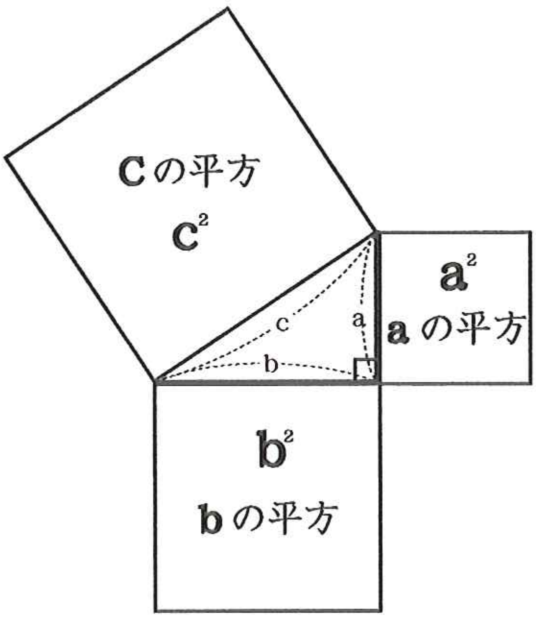
各辺を１辺とする正方形をつくると

直角をはさむ２辺の上にある正方形の

面積の和は

斜辺の上にある正方形の面積

と等しいと言える。



$$a^2 \quad + \quad b^2 \quad = \quad c^2$$

aの平方 ＋ bの平方 ＝ cの平方

よって**三平方の定理**と名付けられた。

計算機で確かめなさい。

① $3^2 + 4^2 = 5^2$

(9) + (16) = (25)

② $5^2 + 12^2 = 13^2$

(25) + (144) = (169)

③ $7^2 + 24^2 = 25^2$

(49) + (576) = (625)

④ $8^2 + 15^2 = 17^2$

(64) + (225) = (289)

⑤ $9^2 + 40^2 = 41^2$

(81) + (1600) = (1681)

⑥ $11^2 + 60^2 = 61^2$

(121) + (3600) = (3721)

⑦ $12^2 + 35^2 = 37^2$

(144) + (1225) = (1369)

⑧ $13^2 + 84^2 = 85^2$

(169) + (7056) = (7225)

⑨ $16^2 + 63^2 = 65^2$

(256) + (3969) = (4225)

計算機で確かめなさい。

⑩ $20^2 + 21^2 = 29^2$

$(400) + (441) = (841)$

⑪ $28^2 + 45^2 = 53^2$

$(784) + (2025) = (2809)$

⑫ $33^2 + 56^2 = 65^2$

$(1089) + (3136) = (4225)$

⑬ $36^2 + 77^2 = 85^2$

$(1296) + (5929) = (7225)$

⑭ $39^2 + 80^2 = 89^2$

$(1521) + (6400) = (7921)$

⑮ $48^2 + 55^2 = 73^2$

$(2304) + (3025) = (5329)$

⑯ $65^2 + 72^2 = 97^2$

$(4225) + (5184) = (9409)$

一の位に５が多いですね。

ピタゴラス数

a, b, c が整数で

$$a^2 + b^2 = c^2$$

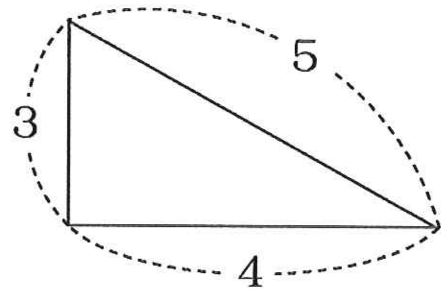
となるような場合は、
いくつか考えられる。

このような関係の整数を、
ピタゴラスがいくつか見つけているためか、
昔から
[ピタゴラス数]と呼んでいます。

昔から有名で、
今もしばしば使われているものに、

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

があります。

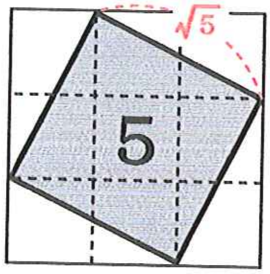


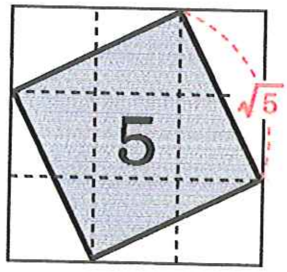
古代エジプト人は、
１本のなわを
[３：４：５]に分け、
右の図のようにすると、
直角三角形ができることを知っていて、
洪水の後の土地測量など、
土木工事に使っていた、ということです。

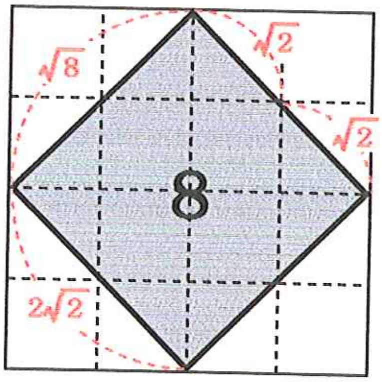
直角を知るのに
このような面倒なことをしたとは
信じられないのですが。

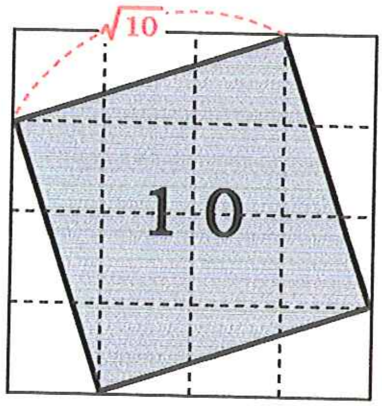
直角だけならば、
もっと簡単な方法が
わかっていたはずですし。

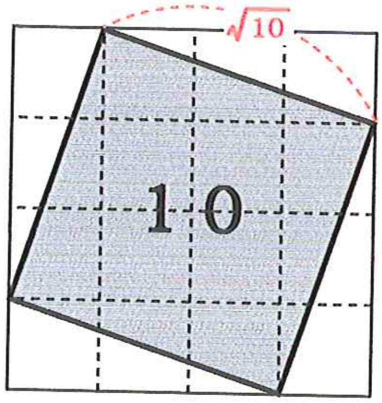
次の網かけした正方形の大きさを方眼の数で表してみます。

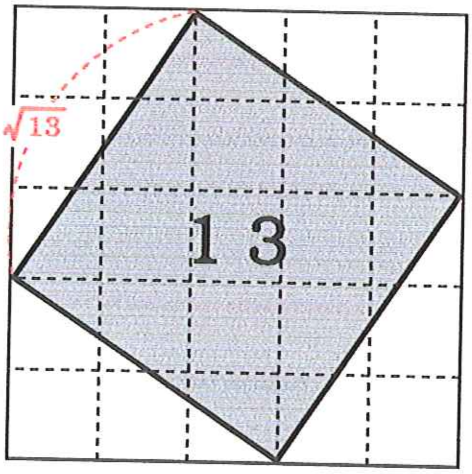


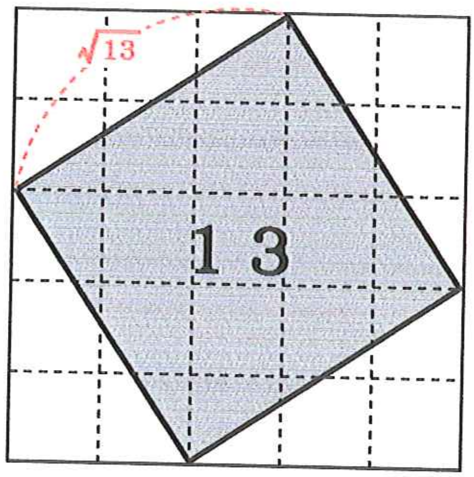


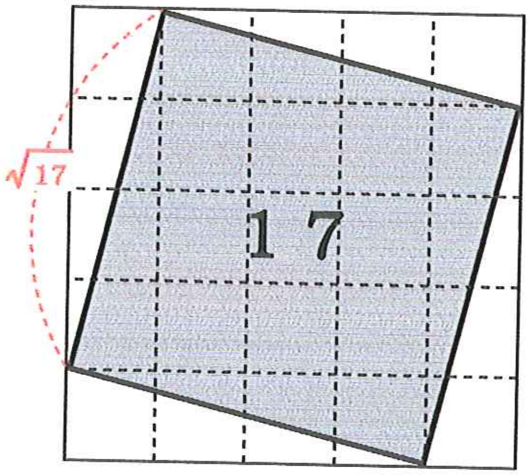


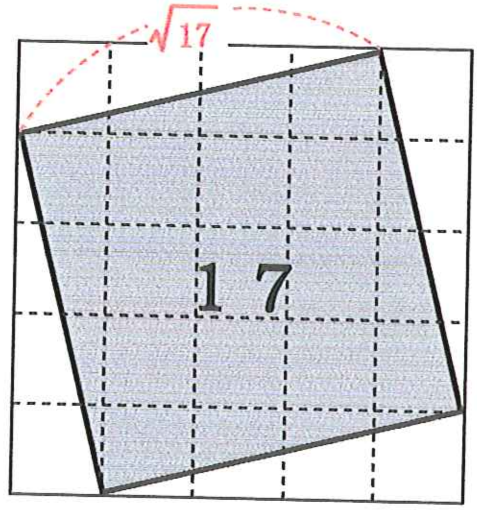










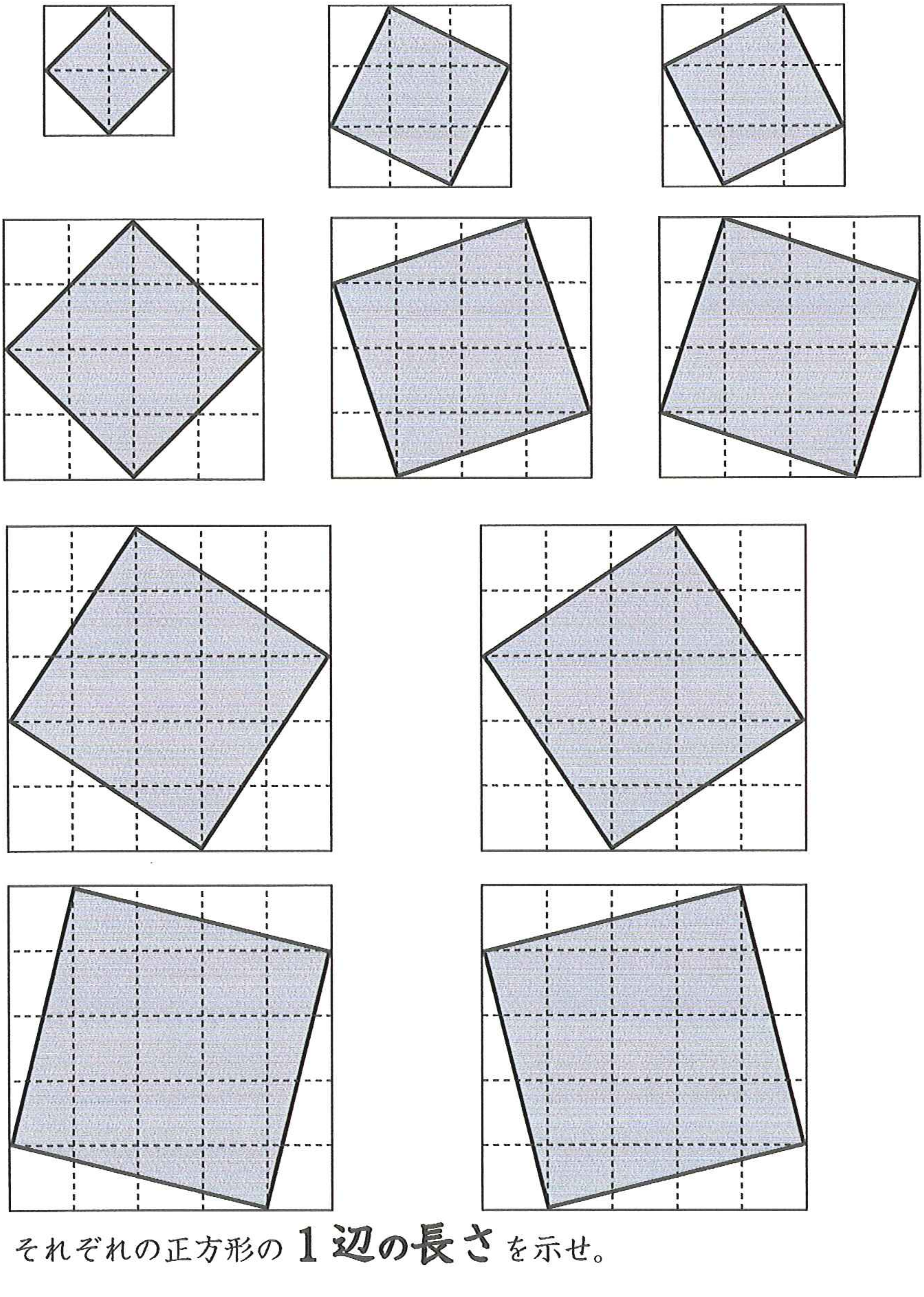


上の正方形の**１辺の長**さを示せ。

三平方の定理

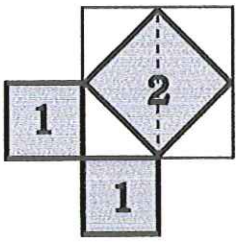
少しの復習から

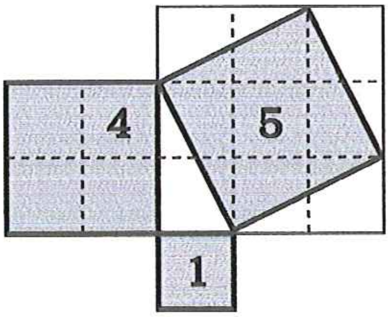
【１】次の網かけした正方形の大きさを方眼の数で表しなさい。

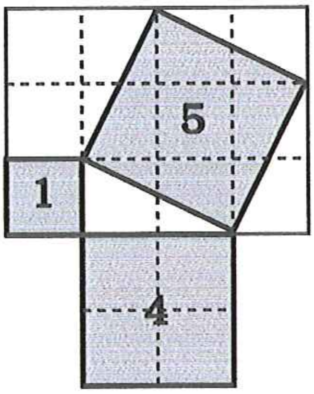


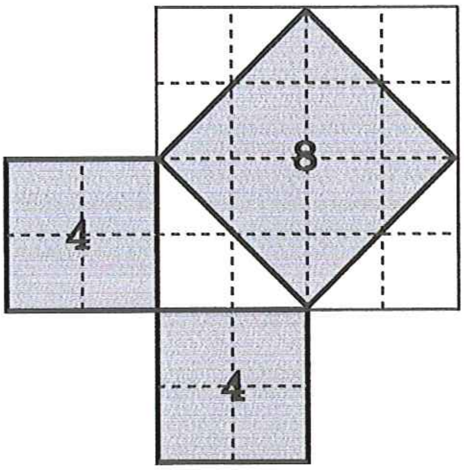
それぞれの正方形の **１辺の長さ** を示せ。

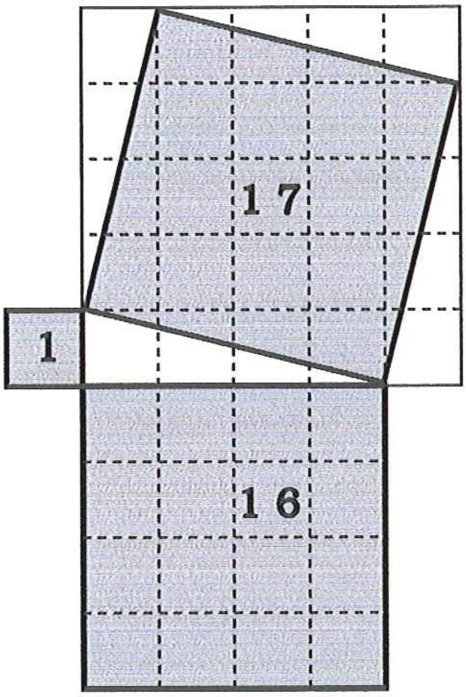
次の網かけした正方形の大きさを方眼の数で表しなさい。

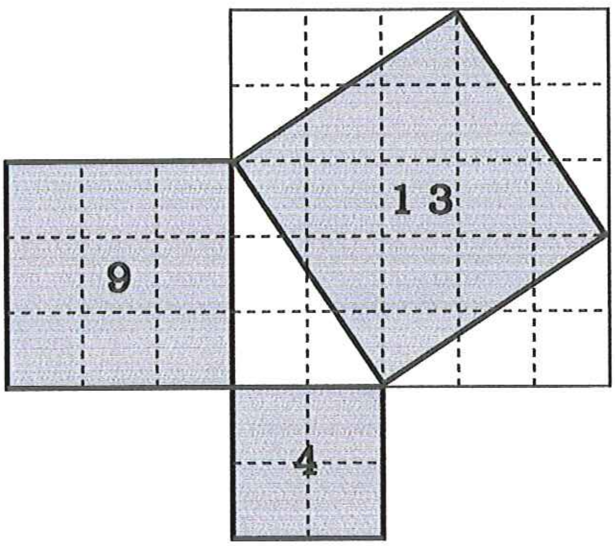




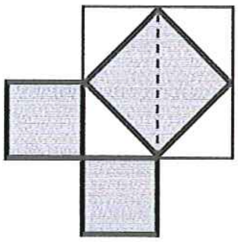


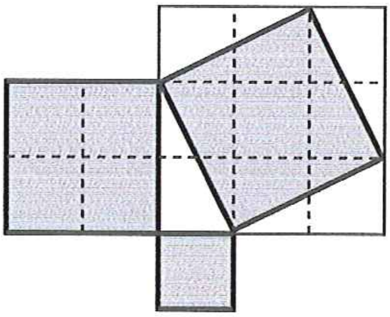


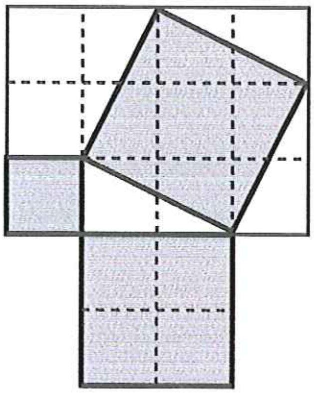


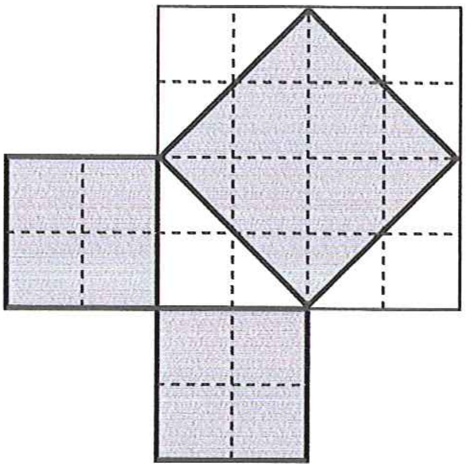


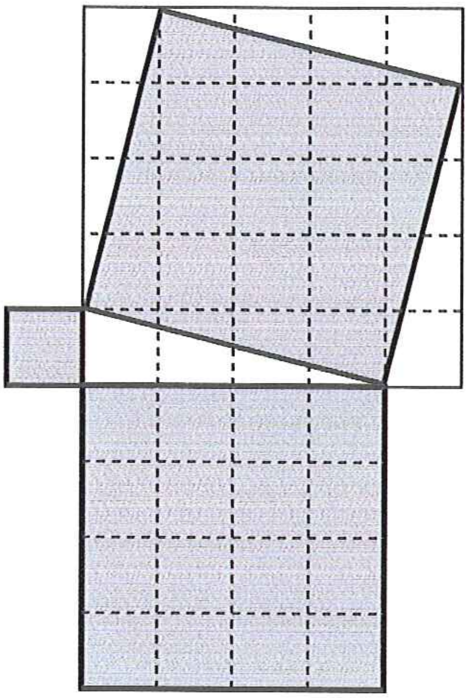
【2】次の網かけした正方形の大きさを方眼の数で表しなさい。

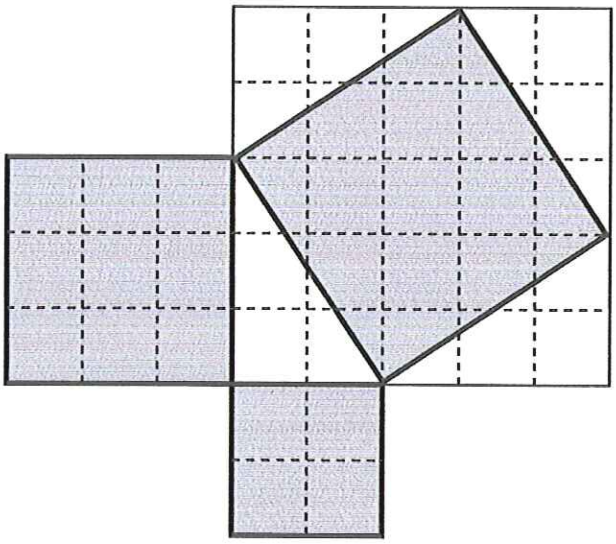






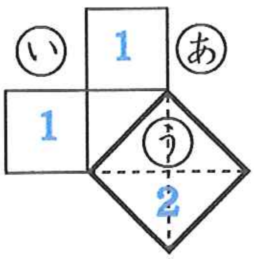


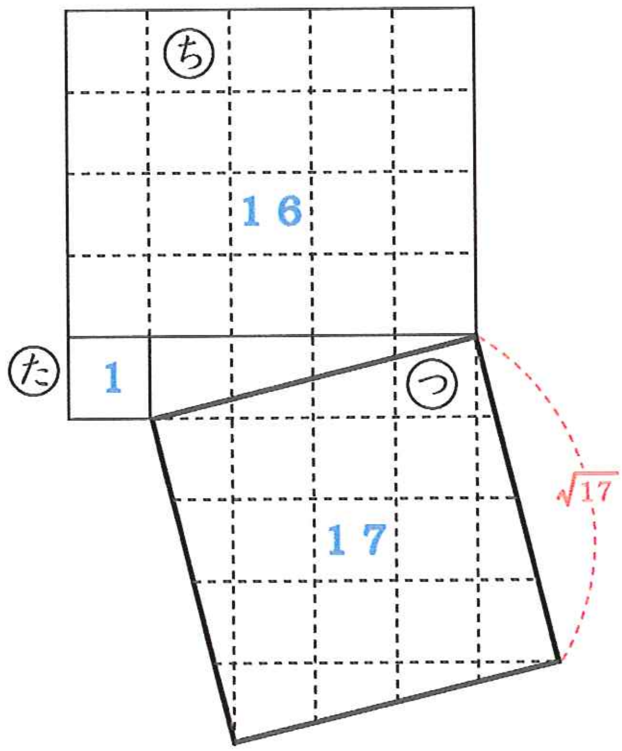


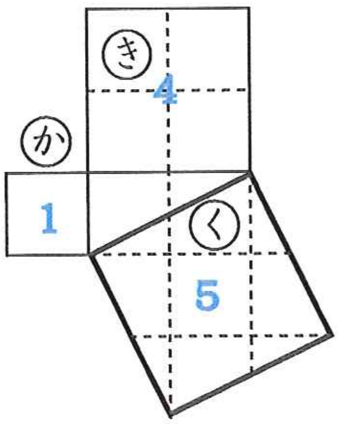


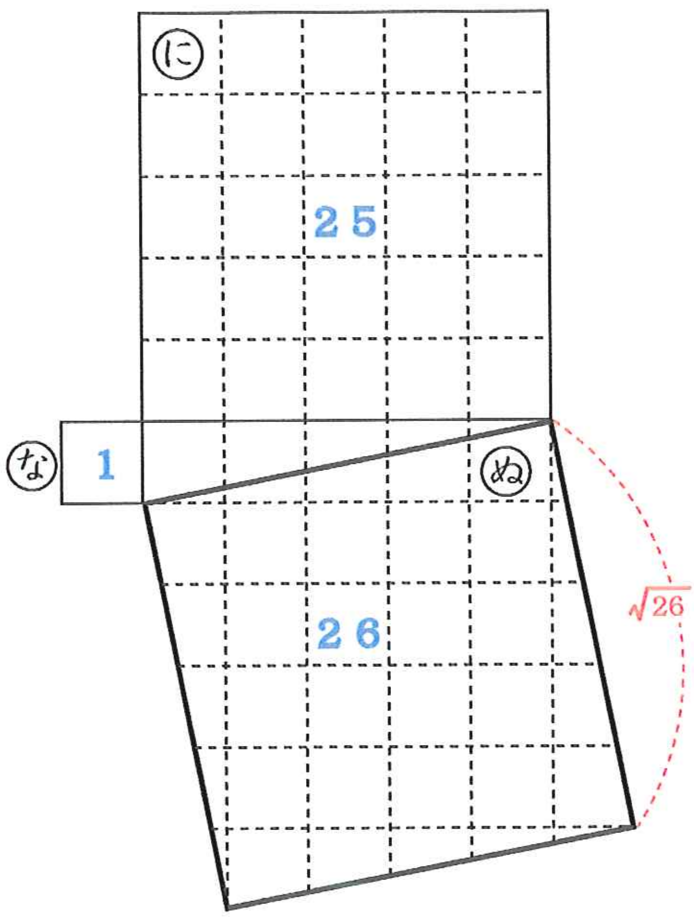
それぞれの正方形の **1辺の長さ** を示せ。

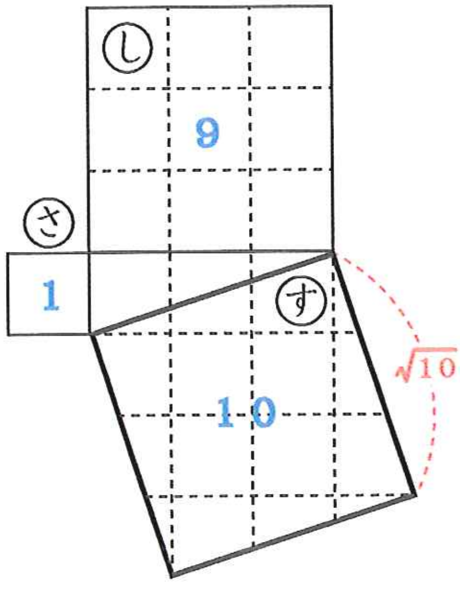
次のそれぞれの、**正方形の１辺の長さ**を示しなさい。
（方眼は１cmとして）



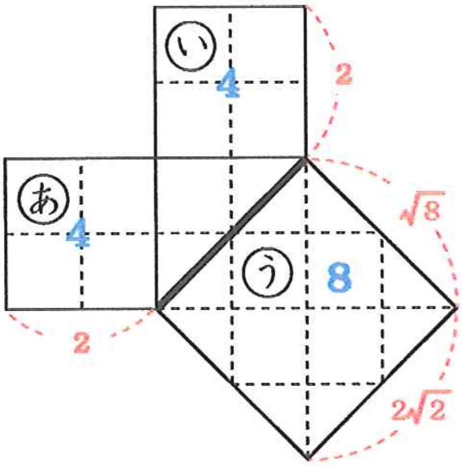


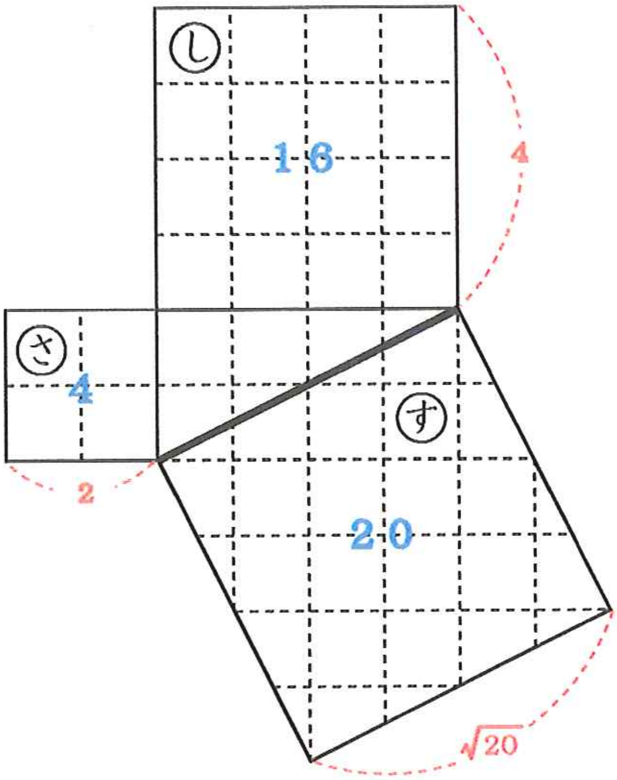


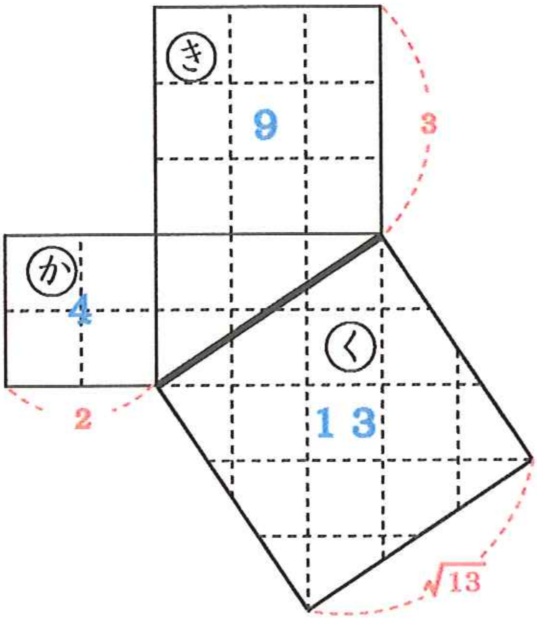


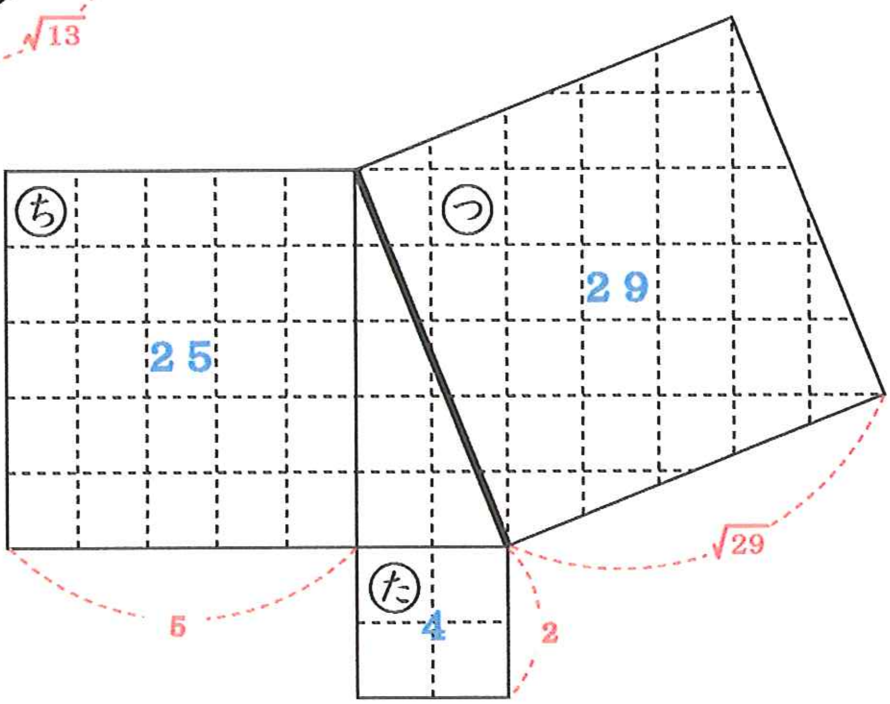


実線でかこまれた、**正方形の面積**を方眼の数で表し
分かったことを述べなさい。

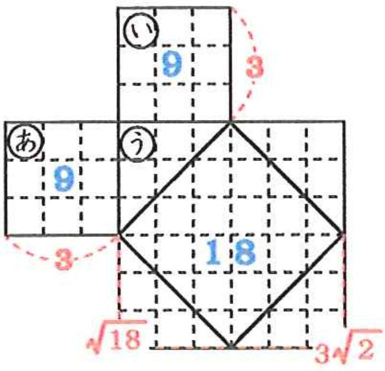


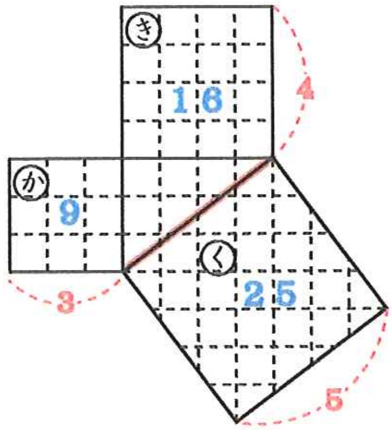


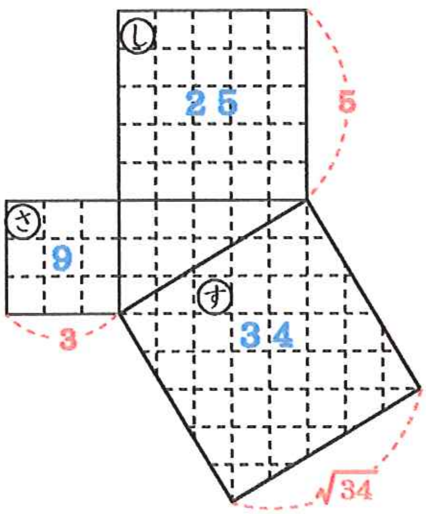


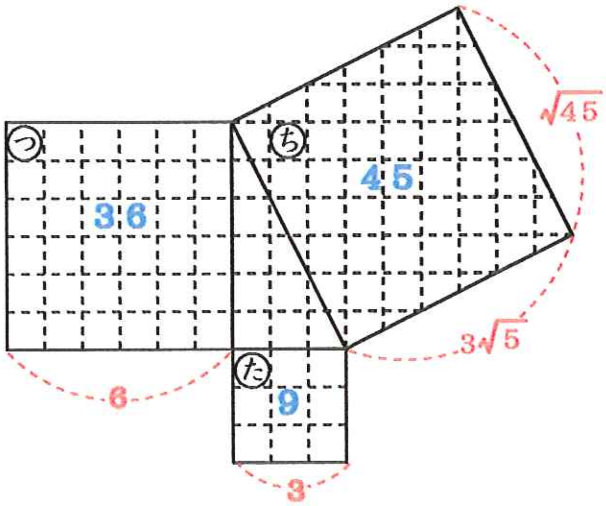


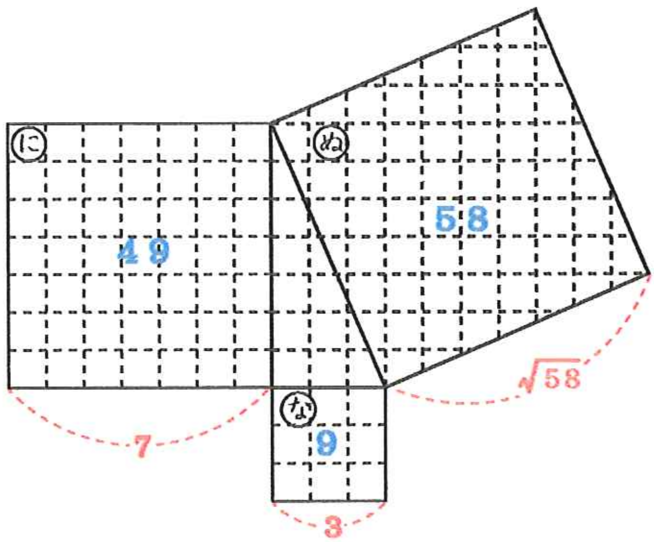
次の正方形の、**１辺の長さ**を示せ。（方眼の長さを１として）



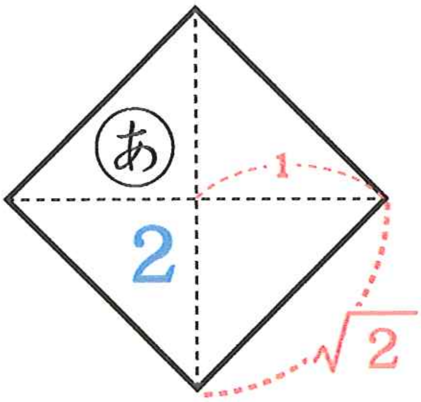


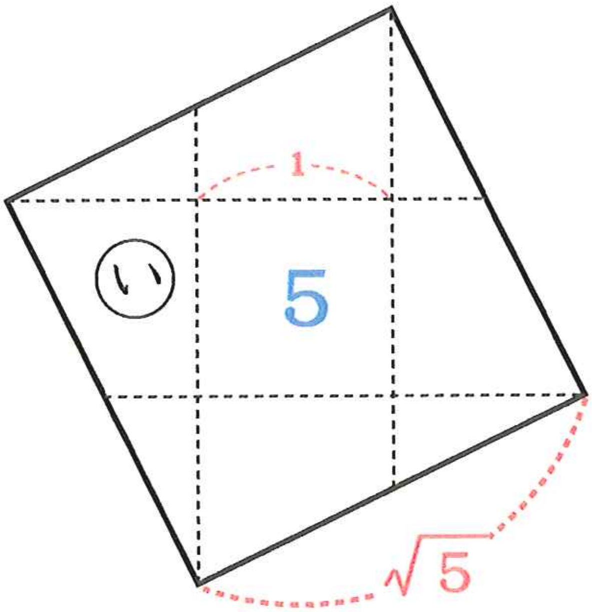






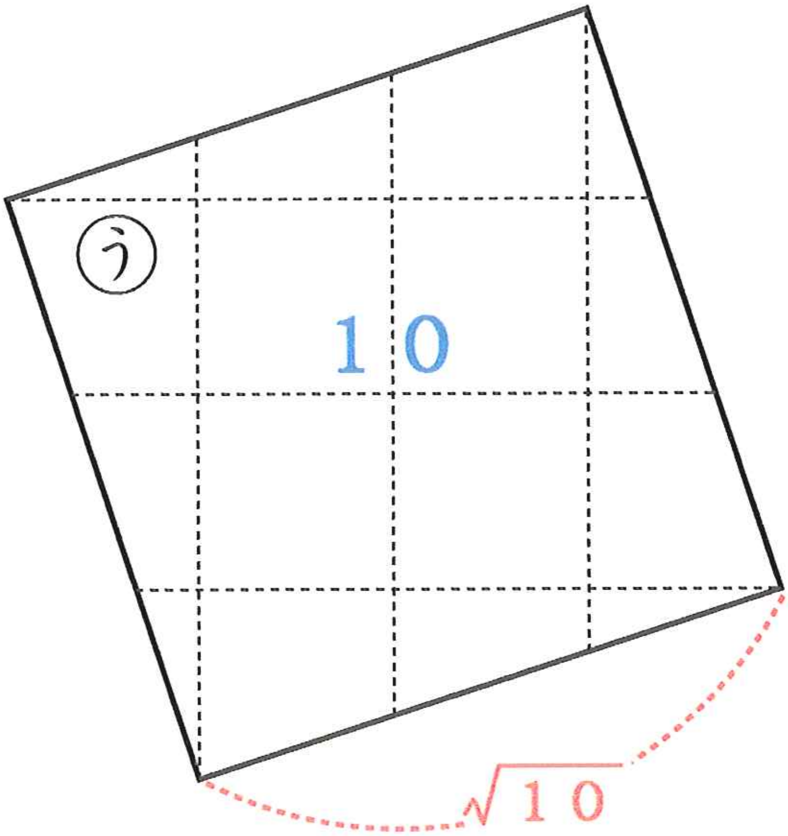
次の正方形の**1辺の長さ**を方眼の大きさ（長さ）で示せ。





$$4 \times 4 - \frac{3 \times 1}{2} \times 4$$

$$= 10$$



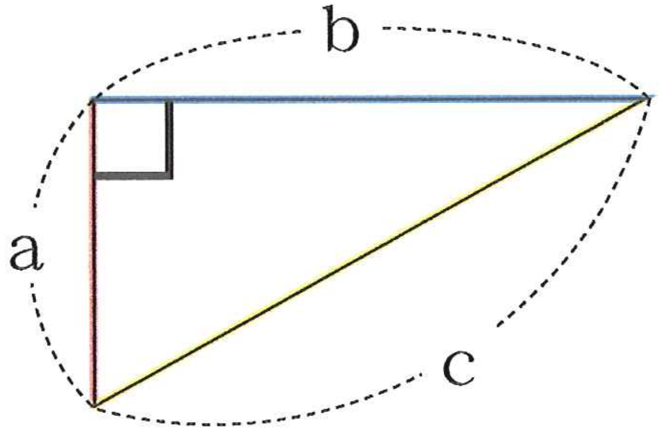
三平方の定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

直角三角形において
直角をはさむ
２辺の長さを a、b、
斜辺の長さを c とすると

$$a^2 + b^2 = c^2$$

である。



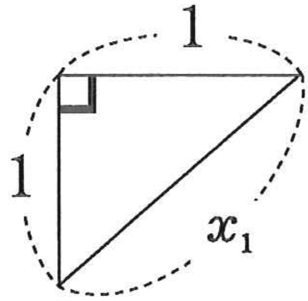
これを、日本では意味をとって
[三平方の定理]という。

欧米諸国では、発見者の名にちなんで、
[ピタゴラスの定理]という。

意味をとった命名は
学習にとても便利です。。

直角二等辺三角形の**斜辺の長さ**

４５度、４５度、９０度

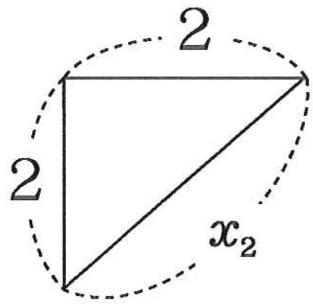


＜エクス１(いち)の２乗＞と読む。

$$x_1^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$



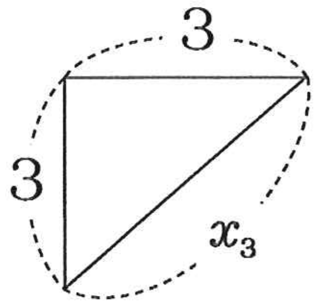
＜エクス２(に)の２乗＞と読む。

$$x_2^2 = 2^2 + 2^2$$

$$x_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}$$

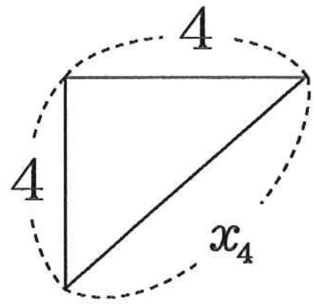


$$x_3^2 = 3^2 + 3^2$$

$$x_3 = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2}$$

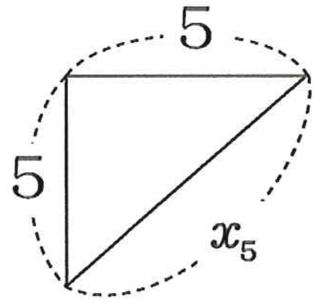


$$x_4^2 = 4^2 + 4^2$$

$$x_4 = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2}$$



$$x^2 = 5^2 + 5^2$$

$$x_5 = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2}$$

a^2は、
aを1辺とする正方形の面積

b^2は、
bを1辺とする正方形の面積

c^2は、
cを1辺とする正方形の面積

と考えることができるので、
［三平方の定理］は、
次のように言うことができます。

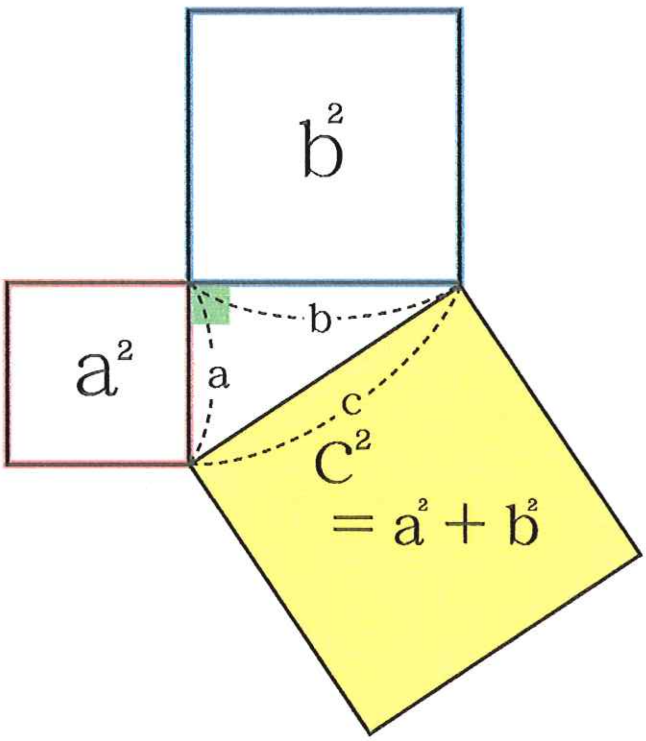
［三平方の定理］の変形

直角三角形において

［**直角**をはさむ**2辺**の上に立つ

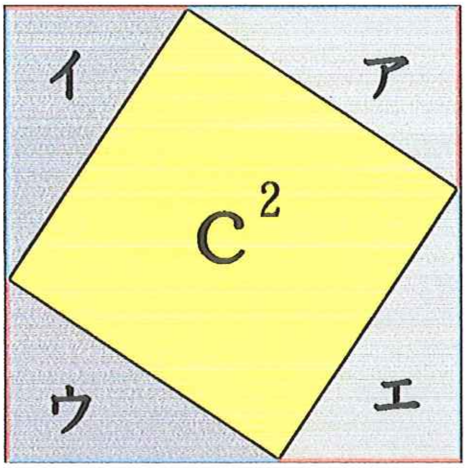
2つの正方形の面積の和］は、

［**斜辺**の上にたつ**正方形**の面積］と等しい。



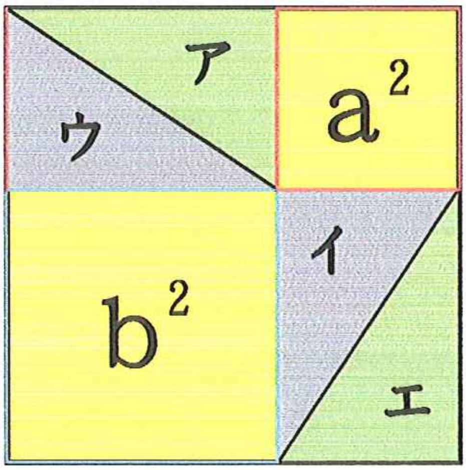
ふつうこちらの意味で理解し使うことが多い。

証明その［１］



４つの合同な
直角三角形
ア、イ、ウ、エを

大きな正方形から
４つの直角三角形
ア、イ、ウ、エを引くと c^2 です。



左の図のように置き直すと

a^2 と b^2 が

見えてきます。

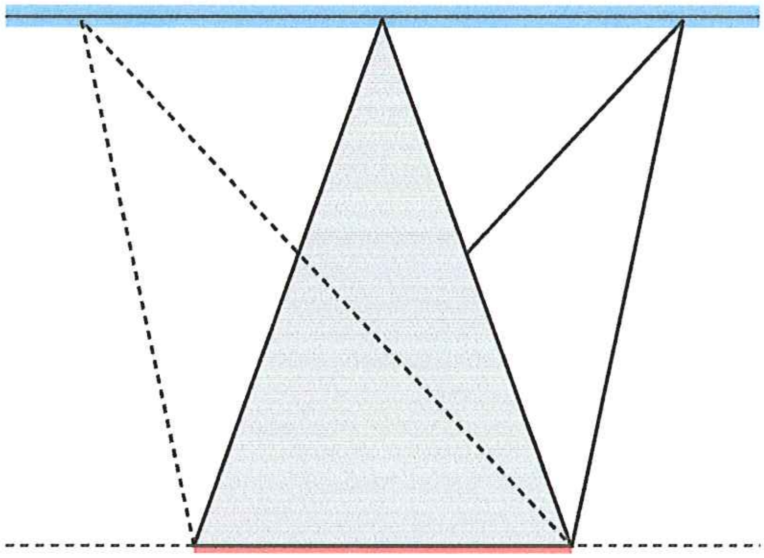
大きな正方形から
４つの直角三角形
ア、イ、ウ、エを引くと a^2 ＋ b^2 です。

それゆえ $c^2 = a^2 + b^2$

これは、
古代中国の本にある証明だとのことです。

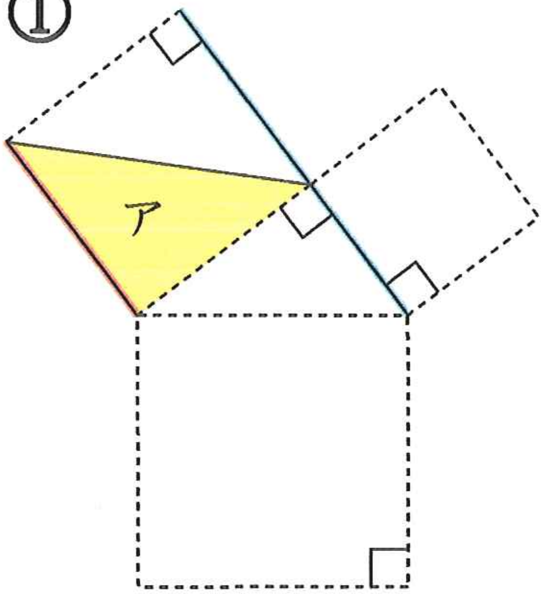
証明その［２］

［等積変形］



底辺の等しい三角形は、
底辺に含まれない
頂点の平行移動により、
面積に変化はない。
（このことは小学校で学んだ）

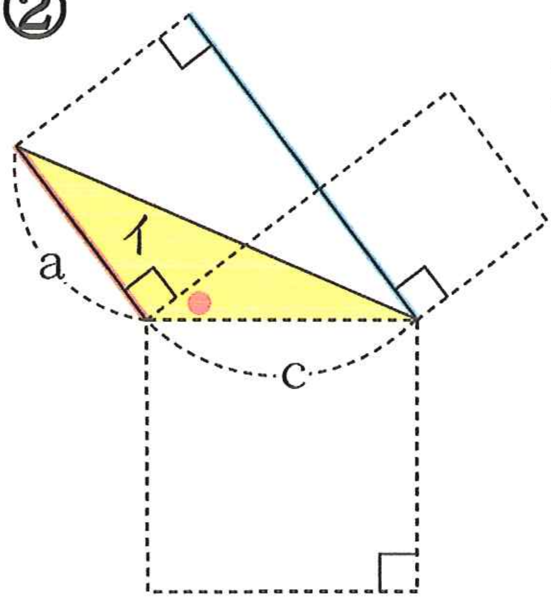
①



等積変形

ア＝イ

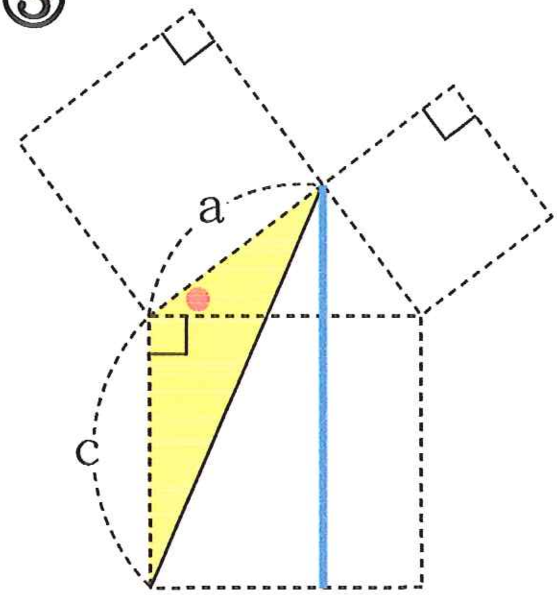
②



合同 ⇒

下図の２つは
直角三角形の
２辺ａ，ｃを辺とする
合同な三角形である。

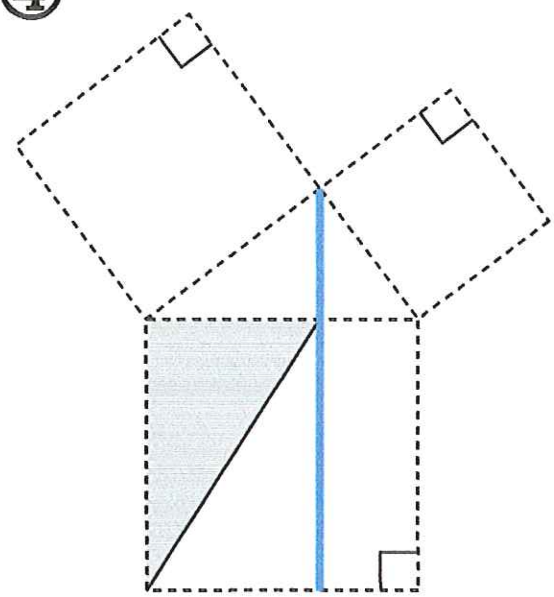
③



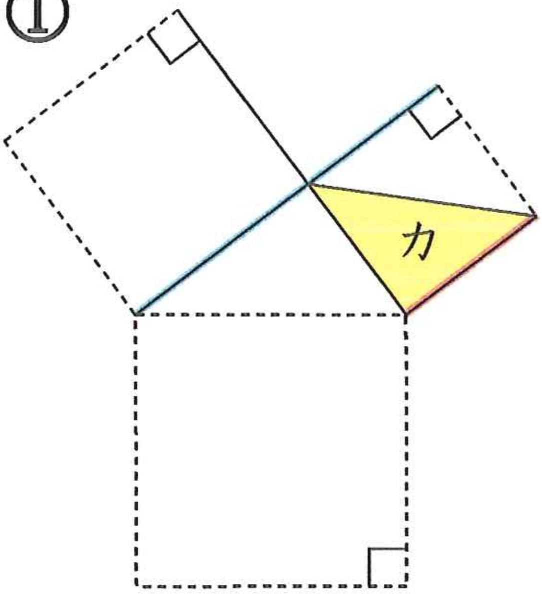
等積変形

⇓

④



①

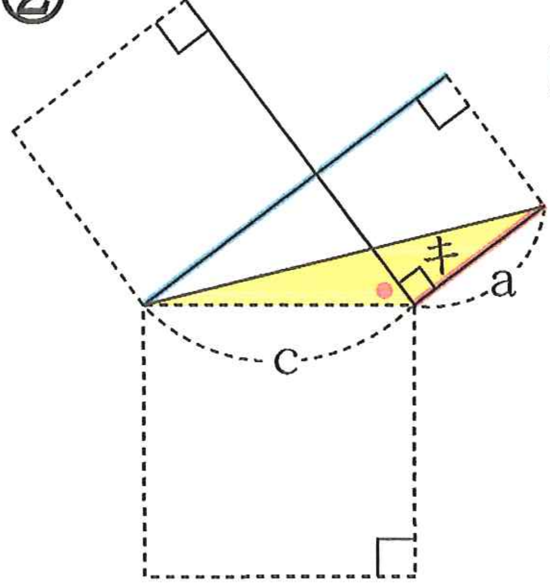


下図の２つは
直角三角形の
２辺ａ，ｃを辺とする
合同な三角形である。

等積変形

カ＝キ

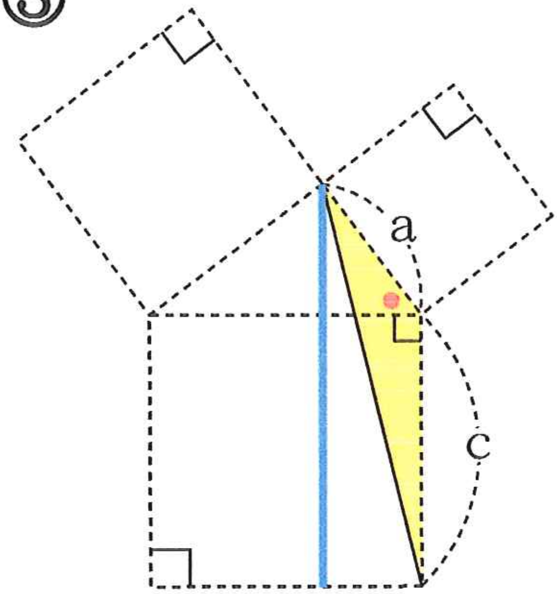
②



合同

⇒

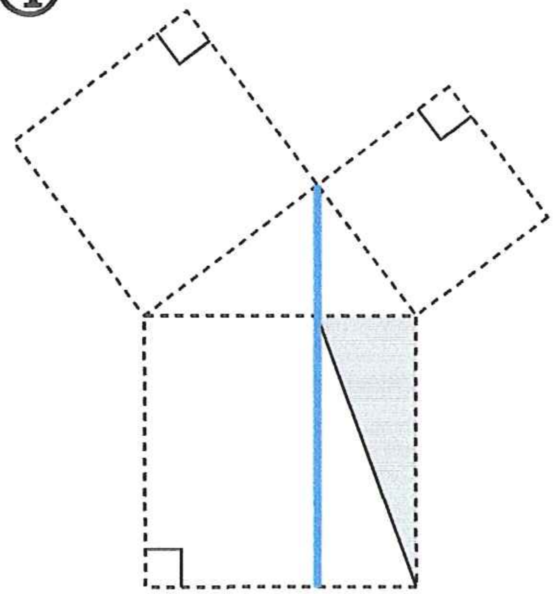
③



等積変形

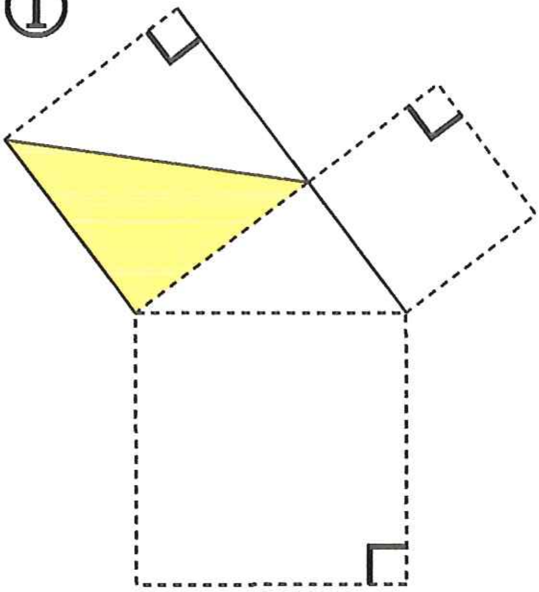
⇓

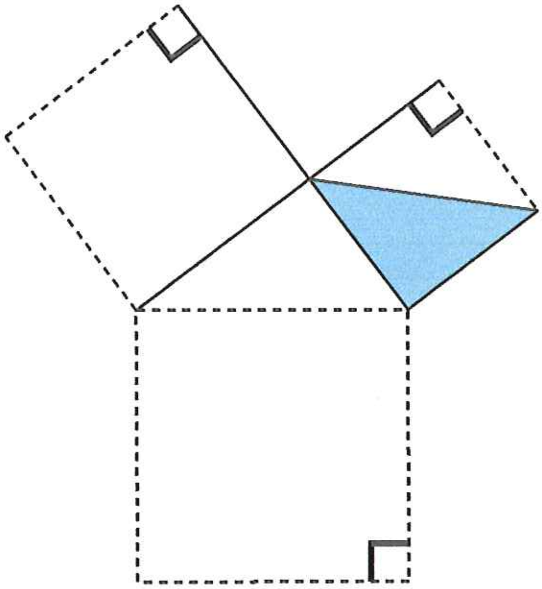
④



三角形（正方形の半分）が、

①

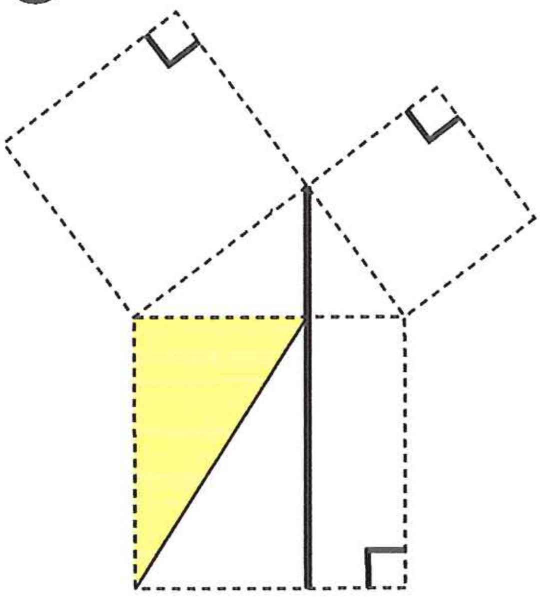


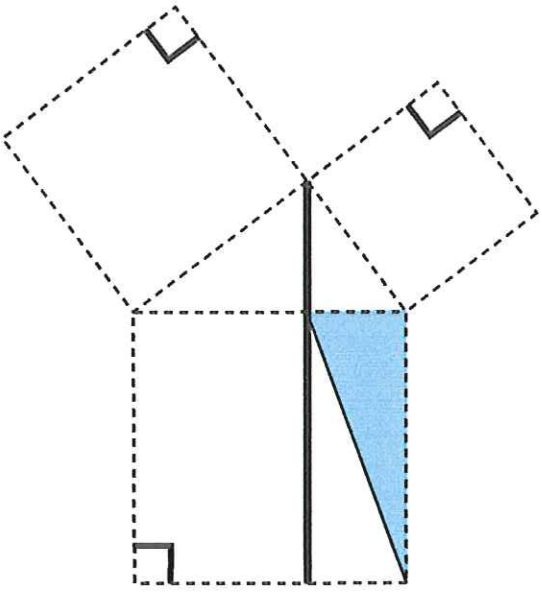


等積変形と合同と等積変形により

上の図が　下の図に移りました。

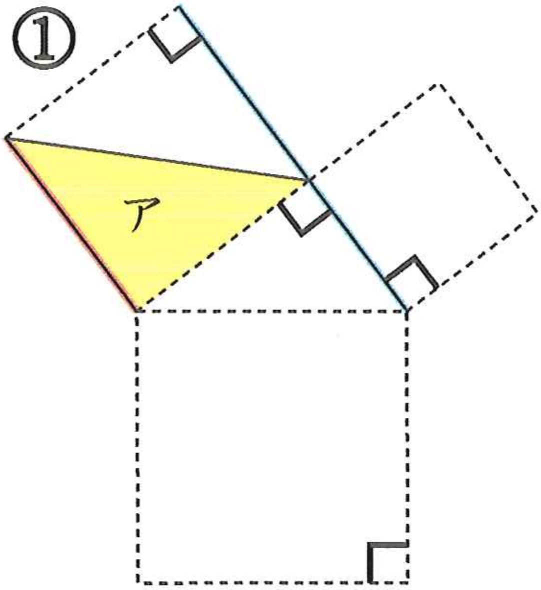
④

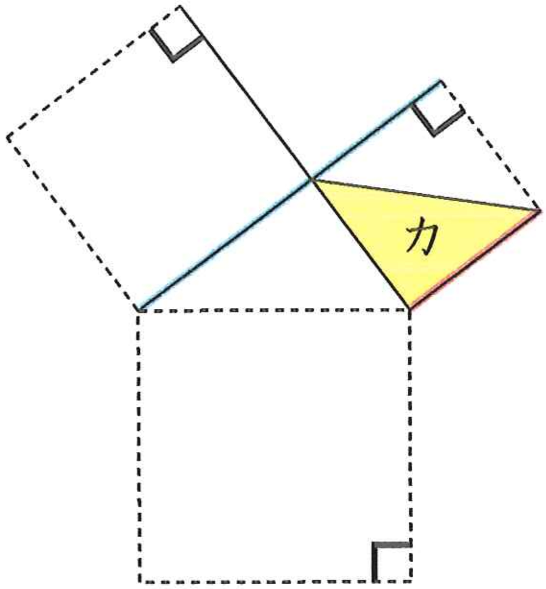




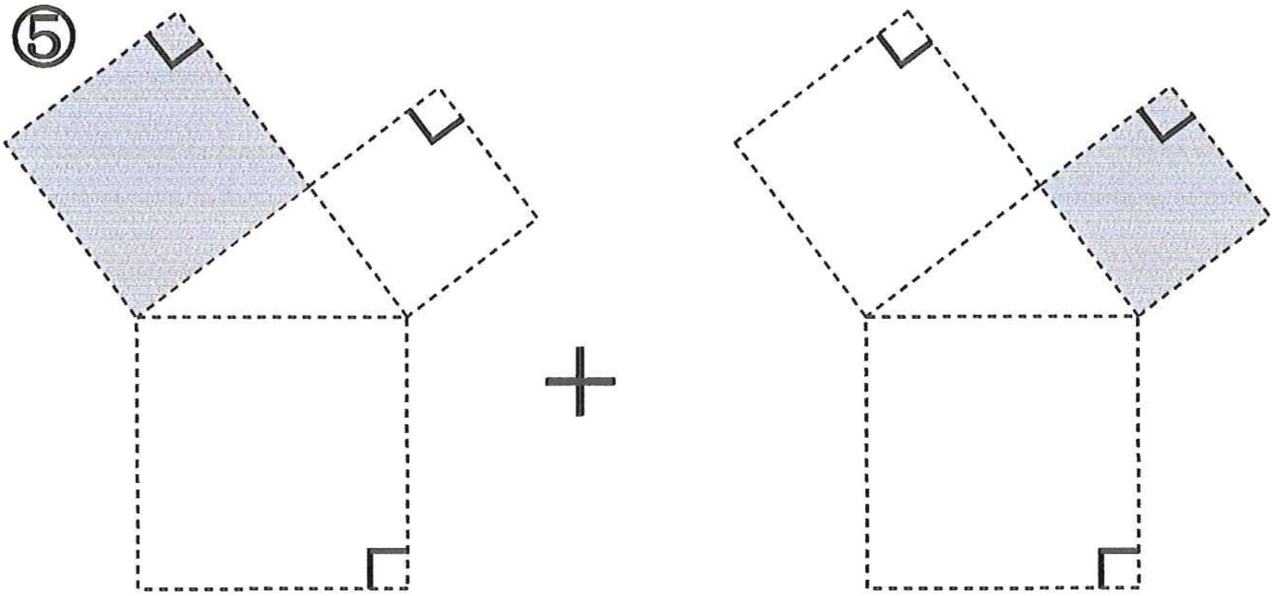
これは
それぞれの面積を２倍すると、
正方形が
長方形に形を変えたことを意味します。

①

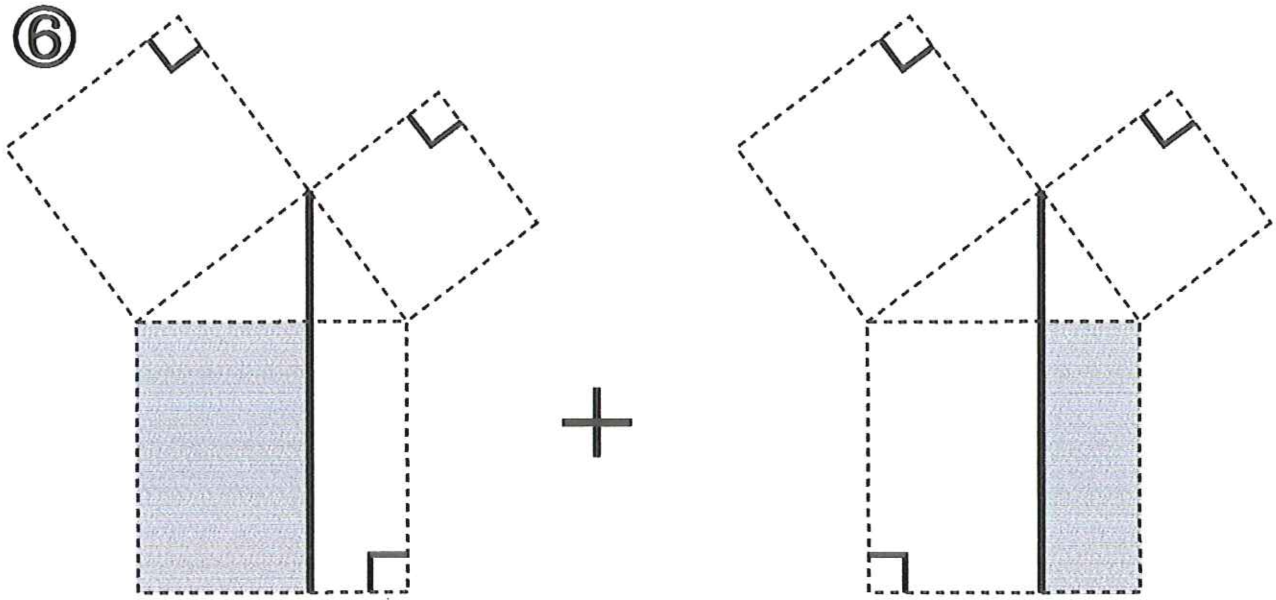




⑤

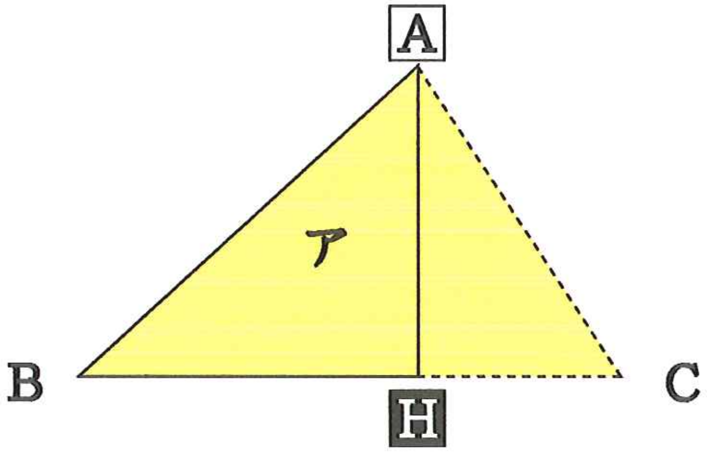


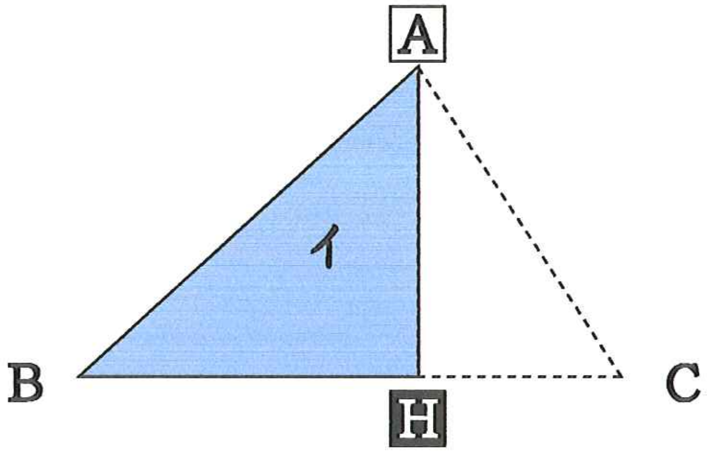
⑥

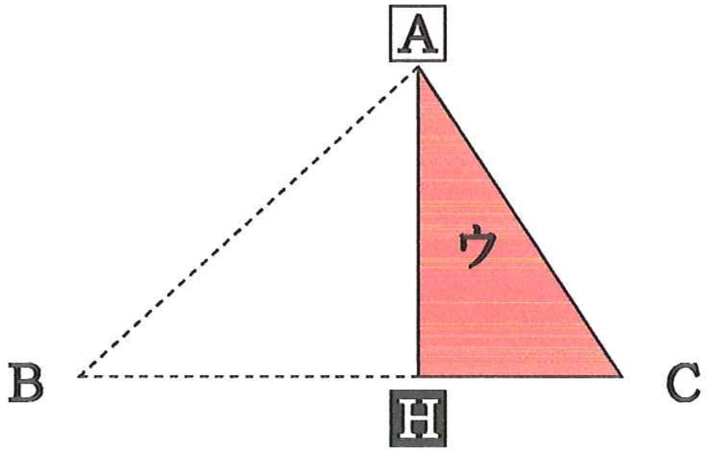


証明その[３]

相似から三平方の定理へ







△ＡＢＣ、△ＨＢＡ、△ＨＡＣは
互いに相似である。

［相似の性質：対応する辺の比が等しい］

$\triangle ABC \backsim \triangle HBA$ だから

$$\frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \quad \cdots ①$$

$\triangle ABC \backsim \triangle HAC$ だから

$$\frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = HC \cdot BC \quad \cdots ②$$

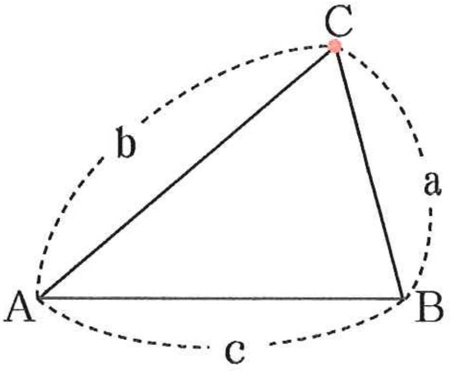
①＋②を考えると

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BH \cdot BC + HC \cdot BC \\ &= BC\,(BH + HC) \\ &= BC \cdot BC = BC^2 \end{aligned}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

三平方の定理の応用 辺と角の関係

3辺がa、b、cの三角形があって



abcの間に **a<C** **b<C**

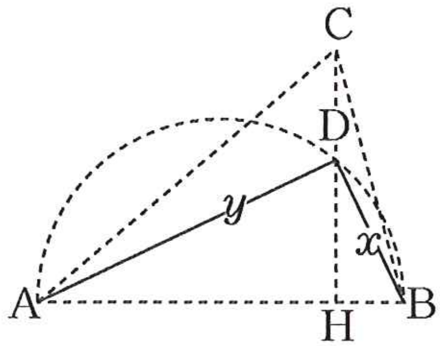
$a^2 + b^2 < c^2$

の関係があるならば、鋭(えい)角三角形である

鋭角三角形（えいかく）

このことは次のようにして証明される。

頂点**C**から、
辺**AB**に垂線**AH**をおろし、
ABを直径とする半円との
交点を**D**とすると、
直角三角形**ABD**ができる。



右上の図で、

$a > x$ だから、$a^2 > x^2$

$b > y$ だから、$b^2 > y^2$

大きいものどうし、小さいものどうしを加えると、

$a^2 + b^2 > x^2 + y^2$

直角三角形より

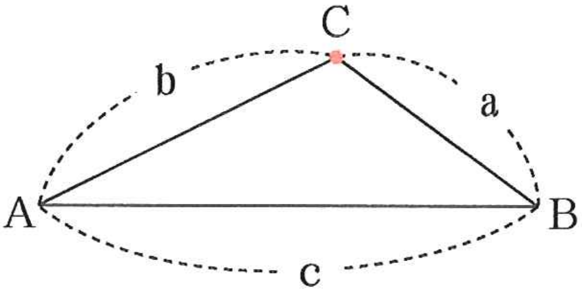
$x^2 + y^2 = c^2$ であるから、

$a^2 + b^2 > c^2$

それゆえ鋭(えい)角三角形

三平方の定理の応用 辺と角の関係

３辺がａ、ｂ、ｃの三角形があって



ａｂｃの間に $a < c$　$b < c$

$a^2 + b^2 < c^2$

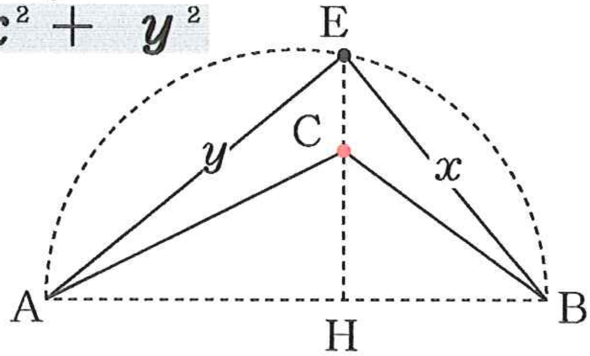
の関係があるならば、鈍(どん)角三角形である

鈍角(どんかく)三角形

このことは次のように証明される。

$a^2 + b^2 < x^2 + y^2$

頂点Ｃから、
辺ＡＢに垂線をたて、
ＡＢを直径とする半円との
交点をＥとすると、
直角三角形ＡＢＥができる。



右上の図で、

$a < x$ だから、$a^2 < x^2$

$b < y$ だから、$b^2 < y^2$

小さいものどうし、大きいものどうしを加えると、

$a^2 + b^2 < x^2 + y^2$

直角三角形より

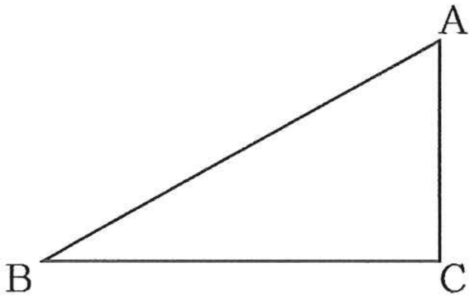
$x^2 + y^2 = c^2$ であるから、

$a^2 + b^2 < c^2$

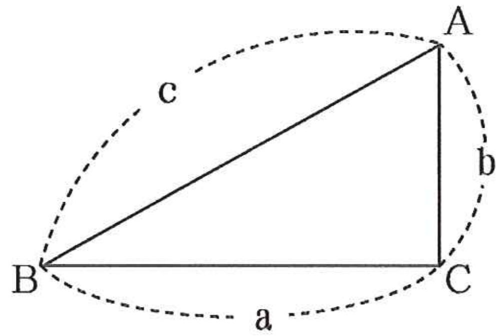
それゆえ鈍(どん)角三角形

三平方の定理の逆

三角形A、B、Cがあって、



AB＝c
BC＝a
CA＝b　　とします。



このとき、
三角形の３辺**a**、**b**、**c**の長さの間に
$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$　仮定　証明の②を見よ。
の関係が成り立てば、

長さ**c**の辺を斜辺とする
直角三角形である。

三角形の**3**辺の長さがわかっているとき、
三角形が、直角三角形であるか否かを計算により
判断できることになります。

例えば、三角形の**3**つの辺が、**3**㎝、**4**㎝、**5**㎝であれば、
$\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$ となりますから、
[直角三角形である]と判断できる、
というわけです。

> 三角形の各辺が、
> $a^2 + b^2 = c^2$　ならば
> **∠Ｃ＝直角**　である。

この定理の証明は
今までの証明方法とかなり異なるので、
[どこと言って変なところはないけれど]
[納得しがたい]と感じる人が多いものです。

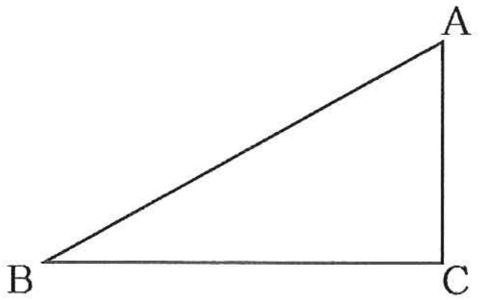
とりあえず丁寧に読んで、

> $a^2 + b^2 = c^2$　ならば
> 直角三角形である。

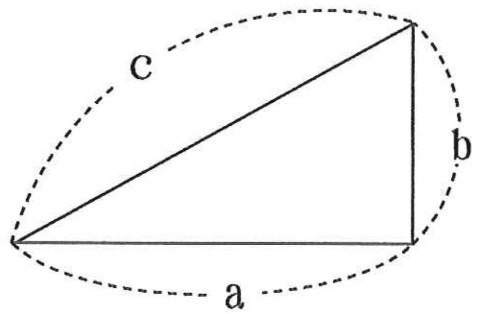
ことが使えれば　よいことにしましょう。

仮定

三角形ＡＢＣにおいて



ＢＣ ＝ ａ
ＡＣ ＝ ｂ
ＡＢ ＝ ｃ　とするとき



$a^2 + b^2 = c^2$　ならば

結論

∠ｃ＝９０°＝∠Ｒ

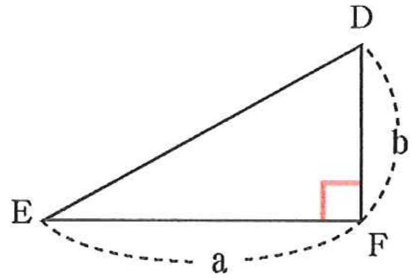
証明

三角形ABCとは別に

$\angle F = \angle R$

$EF = a$

$FD = b$



である直角三角形DEFを書くことは明らかに可能なことです。

$DE = x$とすれば、

三平方の定理により、

$$a^2 + b^2 = x^2$$

一方、仮定により

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ゆえに、①、②から、

$$x^2 = c^2$$

$x > 0$、$c > 0$であるので、

$$x = c$$

もともと、**a**、**b**はそれぞれ等しくとったのであるから、
x＝cであれば、**3**辺がそれ等しい三角形となった。

3辺がそれぞれ等しい三角形は合同です。

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

合同な図形において対応する角は等しいから、

$\angle C = \angle F$

また

$\angle F$は$\angle R$とたのであるから

$\angle C = \angle R$　（証明終わり）

この証明方法を［**同一法による証明**］と言います。

背理法による証明の考え方(原理)その2

否Aがマチガイであるからと言って

Aが正しいとするのは

納得できないと言う人の気持ちは

大いに理解できますが

それは

数学と

他の事象の混同です。

世の事象は殆ど全て

Aと否Aと

Aとも否Aとも言い切れないもの

があるわけですから、気持ち悪いのです。

数学は

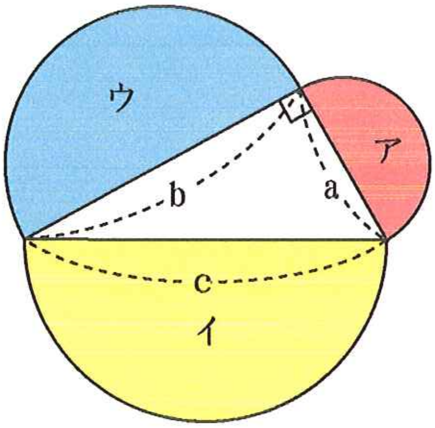
Aと否Aに2分できないものは

フツー扱わない約束です。

三平方の定理の応用

半円を乗せる１

直角三角形の斜辺上の半円の面積は、
他の２辺上の半円の面積の和に等しい。



ア ＝ 半径aの半円の面積 ＝ $\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi a^2}{8}$

イ ＝ 半径bの半円の面積 ＝ $\pi\times\left(\frac{b}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi b^2}{8}$

ウ ＝ 半径cの半円の面積 ＝ $\pi\times\left(\frac{c}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi c^2}{8}$

三平方の定理から　　$a^2+b^2=c^2$

これの各項に　$\frac{\pi}{8}$

をかければ、

$$\frac{\pi a^2}{8}+\frac{\pi b^2}{8}=\frac{\pi c^2}{8}$$

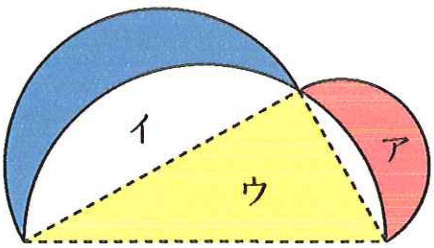
これは、　（ア）＋（イ）＝（ウ）　を示す。

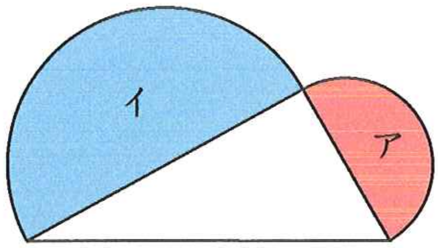
すなわち、
直角三角形の斜辺上の半円の面積は
他の２辺上の半円の面積の和に等しい。
等式の性質は偉大です。［岩波書店刊＜数学の学び方＞より］

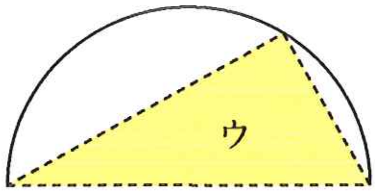
ギリシャ時代から有名な形に、
次の図があります。

直角三角形の各辺を直径とする
半円を図のように書いたとき、
2つの三日月形ができる。

この三日月形の面積の[和]は、
この直角三角形の面積に等しい。







図形全体の面積＝直角三角形＋半円ア＋半円イ

図形全体の面積－（ア＋イ）＝直角三角形

図形全体の面積－（　ウ　）＝２つの三日月形の和

三平方の定理より、
ア＋イ＝ウ　だから、

直角三角形＝２つの三日月形の和