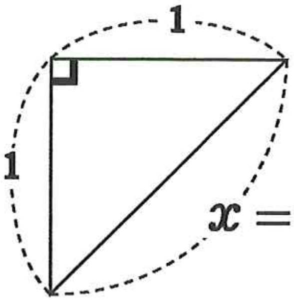
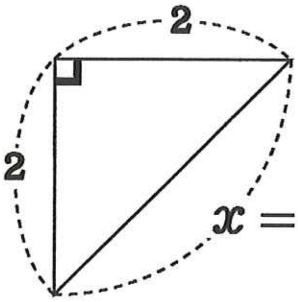
直角二等辺三角形の斜辺の長さ

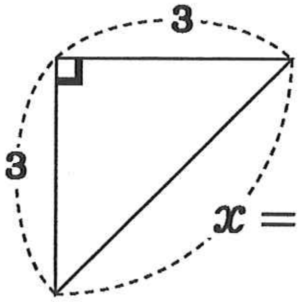
①アを参照のこと



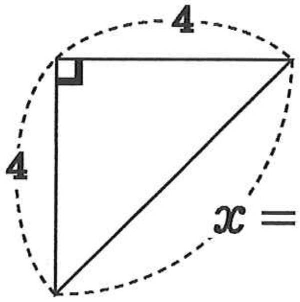
$x = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$



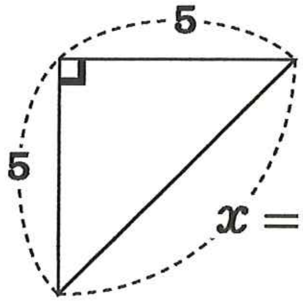
$x = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$



$x = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



$x = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

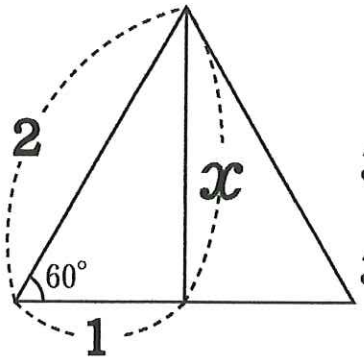


$x = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

速やかに言えるように練習せよ。

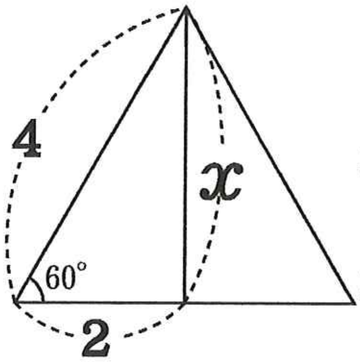
正三角形を二等分した直角三角形

６０度、３０度、９０度



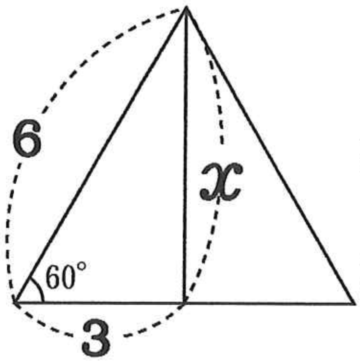
$$x^2 = 2^2 - 1^2$$

$$x = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$



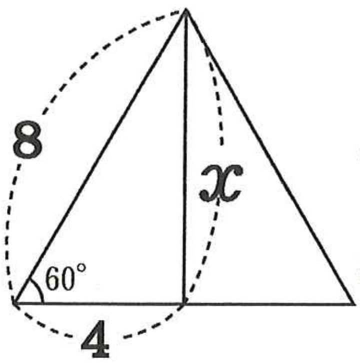
$$x^2 = 4^2 - 2^2$$

$$x = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



$$x^2 = 6^2 - 3^2$$

$$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$



$$x^2 = 8^2 - 4^2$$

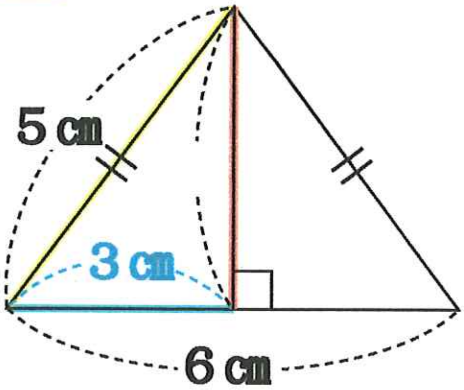
$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

60°　のある辺は
斜辺の半分

60°　のある辺の
$\sqrt{3}$ 倍

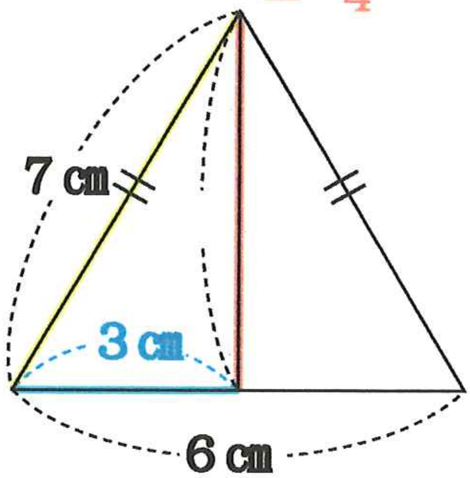
等しい辺と底辺が分かって

二等辺三角形の高さを求める



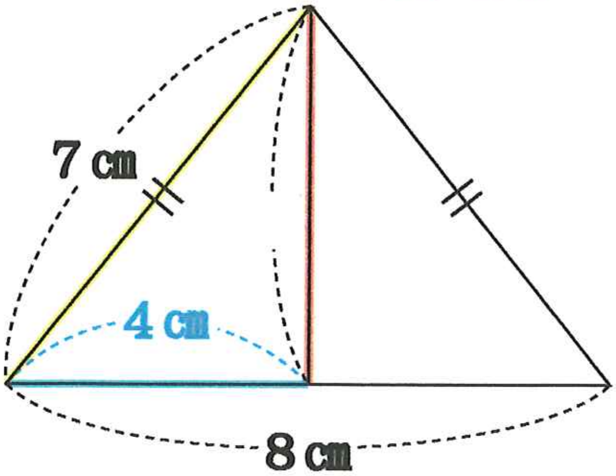
$\sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{16}$

$= 4$



$\sqrt{7^2-3^2} = \sqrt{40}$

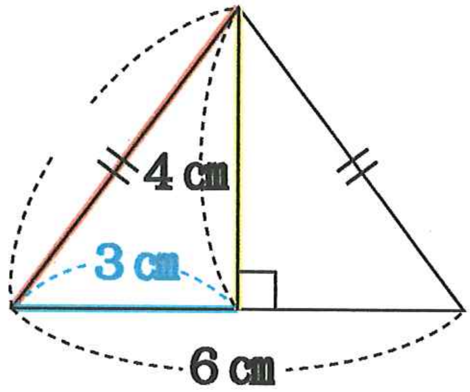
$= 2\sqrt{10}$



$\sqrt{7^2-4^2} = \sqrt{33}$

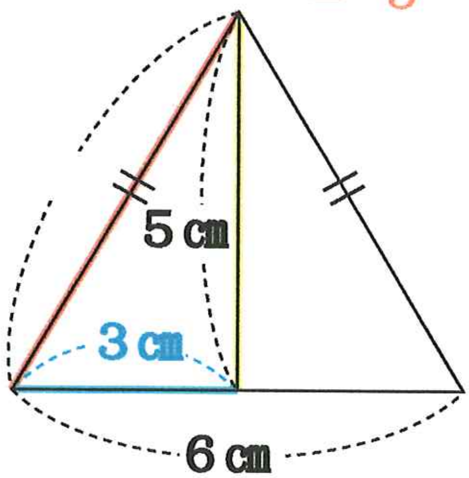
等しい辺と高さが分かって

二等辺三角形の等しい辺を求める

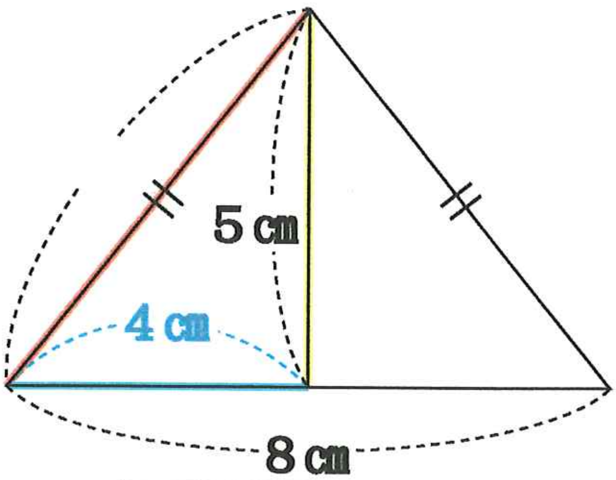


$\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25}$

$= 5$



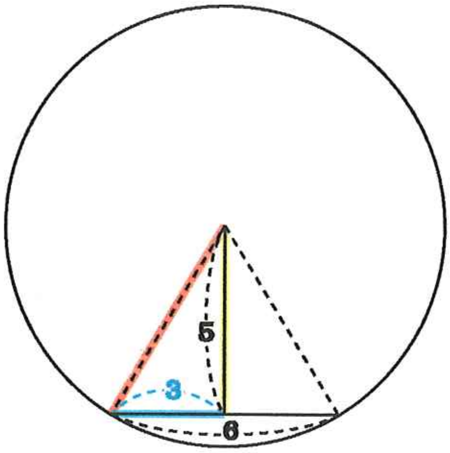
$\sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$



$\sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$

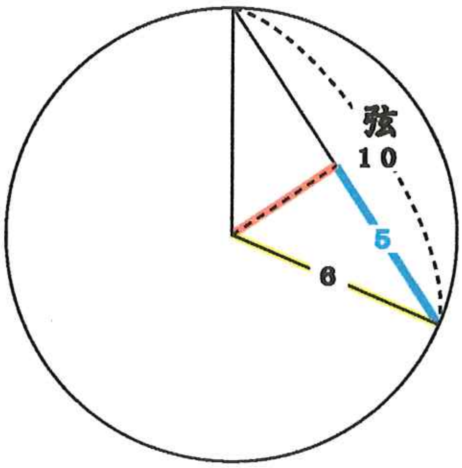
円の中に書かれた二等辺三角形

半径を求めよ



半径 ＝ $\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

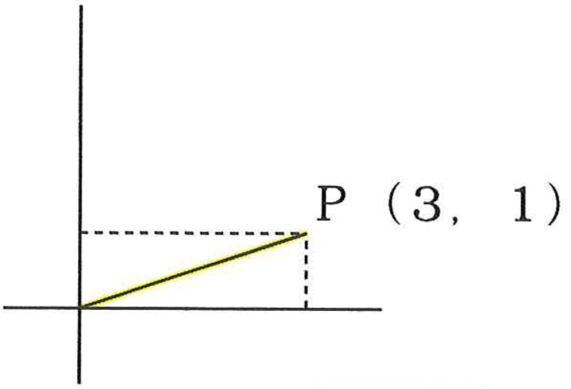
円Oの中心から弦に引いた
垂線の長さを求めよ

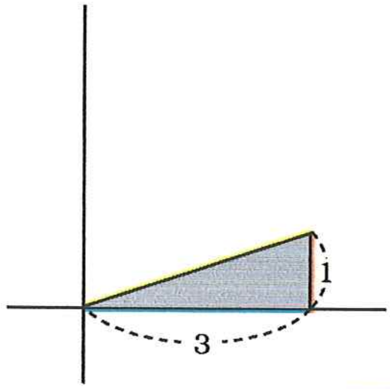


垂線の長さ＝ $\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

座標上の２点間の距離

① 原点Oと点（3， 1）との距離

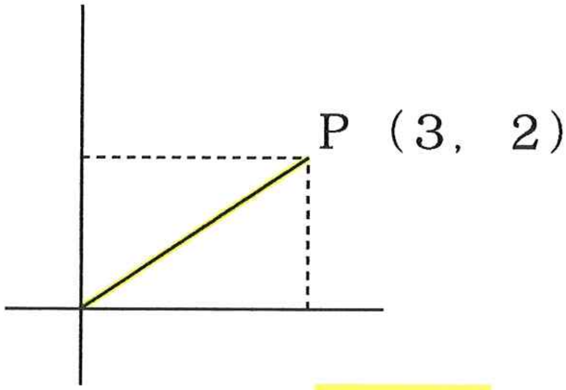


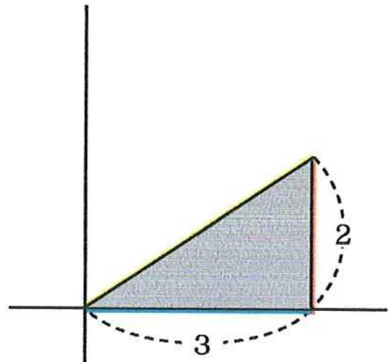


OPの長さ＝$\sqrt{10}$

$\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

② 原点Oと点（3， 2）との距離

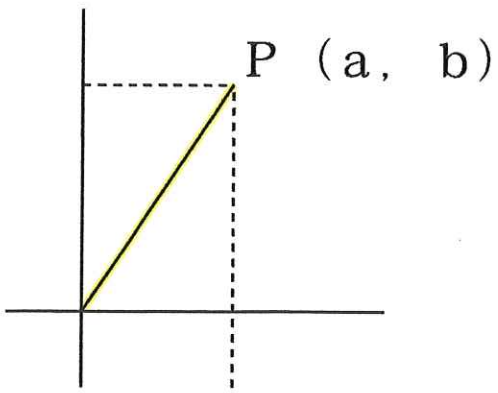


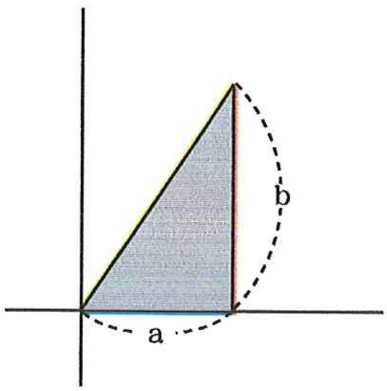


OPの長さ＝$\sqrt{13}$

$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

② 原点Oと点（a， b）との距離





OPの長さ＝$\sqrt{a^2+b^2}$

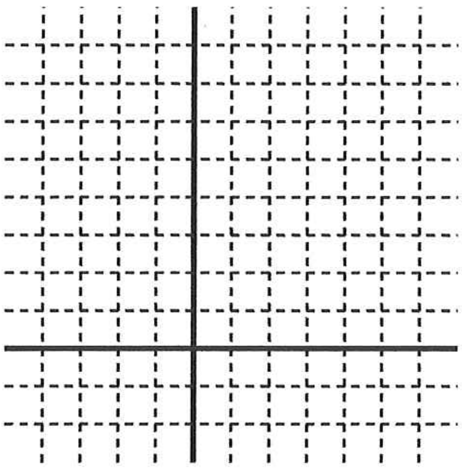
$\sqrt{a^2+b^2}$

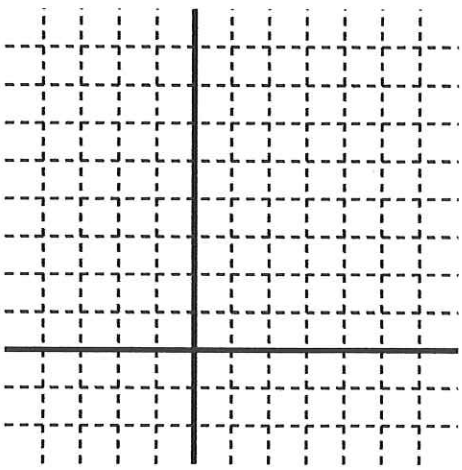
座標上の２点間の距離

直角三角形の１辺を
他の２辺から
計算によって求める事ができることから、

座標上の
任意の２点A，Bをむすぶ
［線分ABの長さ］を
計算によって求めることができます。

上の値を求める前に、
x軸上の２点間の距離と
y軸上の２点間の距離を
少し復習しましょう。





x軸上の２点間の距離

①
原点（0、0）と点（3、0）の距離は

$$3-0=3$$

②
原点（1，0）と点（5、0）の距離は

$$5-1=4$$

③
原点（−3，0）と点（5、0）の距離は

$$5-(-3)=8$$

y軸上の２点間の距離

④
原点（0、0）と点（0、3）の距離は

$$3-0=3$$

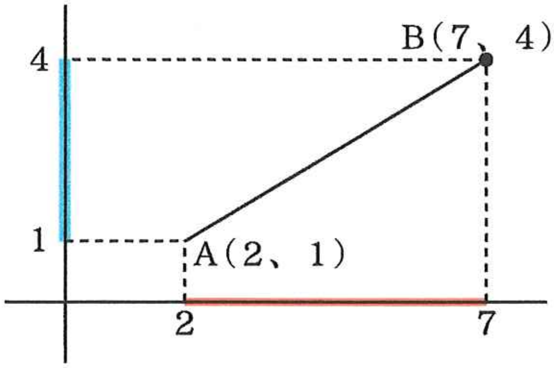
⑤
原点（0，1）と点（0、5）の距離は

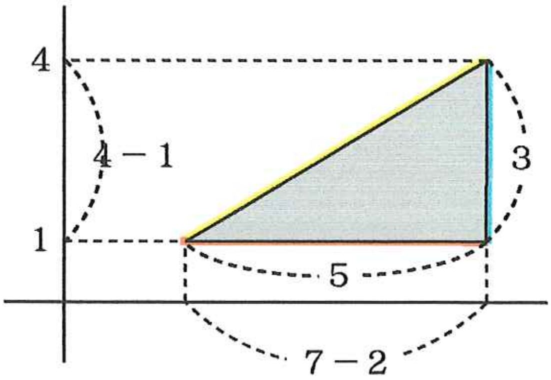
$$5-1=4$$

⑥
原点（0，−2）と点（0、5）の距離は

$$5-(-2)=7$$

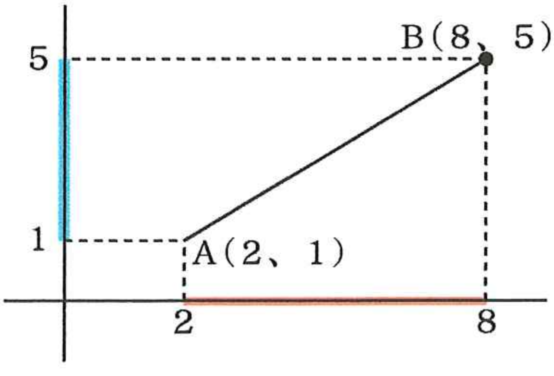
① 2点A（2, 1）、B（7、4）間の距離

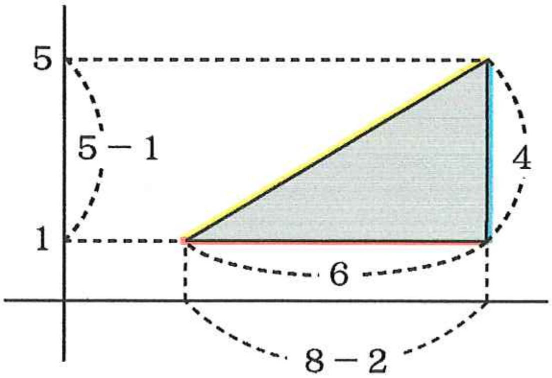




$$AB=\sqrt{(7-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{34}$$

② 2点A（2, 1）、B（8、5）間の距離





$$AB=\sqrt{(8-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{52}$$

$$2\sqrt{13}$$

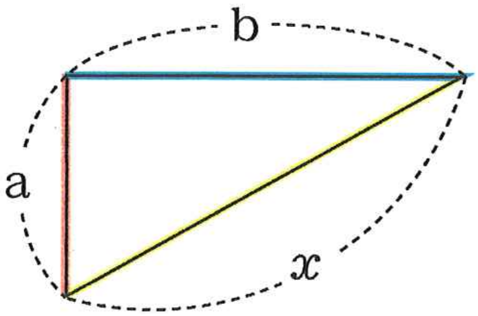
直角三角形の辺の長さが求まる

直角をはさむ2辺の長さを

a、b、

斜辺の長さを

x とすると



$$a^2 + b^2 = x^2$$

であることから、

等号の両側の平方根を、長さとして求めると、

いずれも[正の数]であるから、

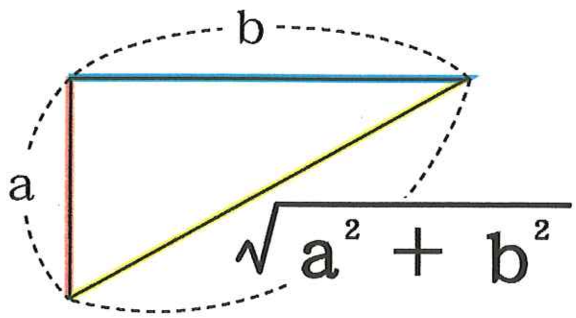
$$a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 \Rightarrow x$$

すなわち

$$\sqrt{a^2 + b^2} = x$$

として求めることができる。

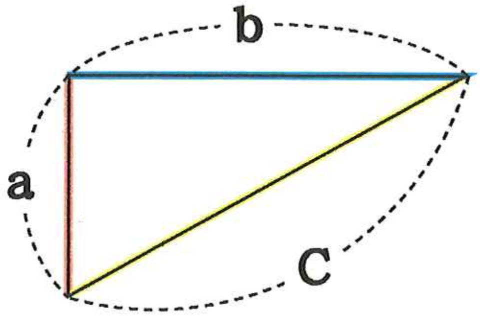


直角三角形の各辺を他の辺で表す。

[三平方の定理]により
直角三角形の
どれかの2つの辺が分れば、
他の1辺の長さを
計算することができる。

すなわち、

直角三角形において



各辺の長さを、a、b、cとするとき

$a^2+b^2=c^2$ であるので、

a、b、cの長さは、

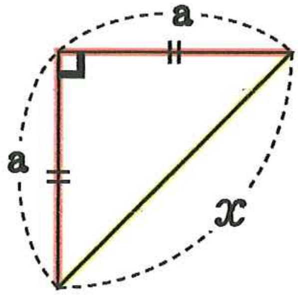
$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

として求められる。

[長さ]に[負の数]は考えられないから、
[正の平方根]だけをとる。



$$x = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2}$$
$$= a\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\,a$$

直角二等辺三角形の
各辺の比は　つねに

$a : a : a\sqrt{2}$　だから、

各項を a でわって、

$1 : 1 : \sqrt{2}$ であると言える。

直角二等辺三角形の斜辺の長さは
つねに、
等しい辺の　$\sqrt{2}$ 倍である。

正方形の対角線の長さ

正方形の対角線は

$a^2 + b^2 = c^2$ において、

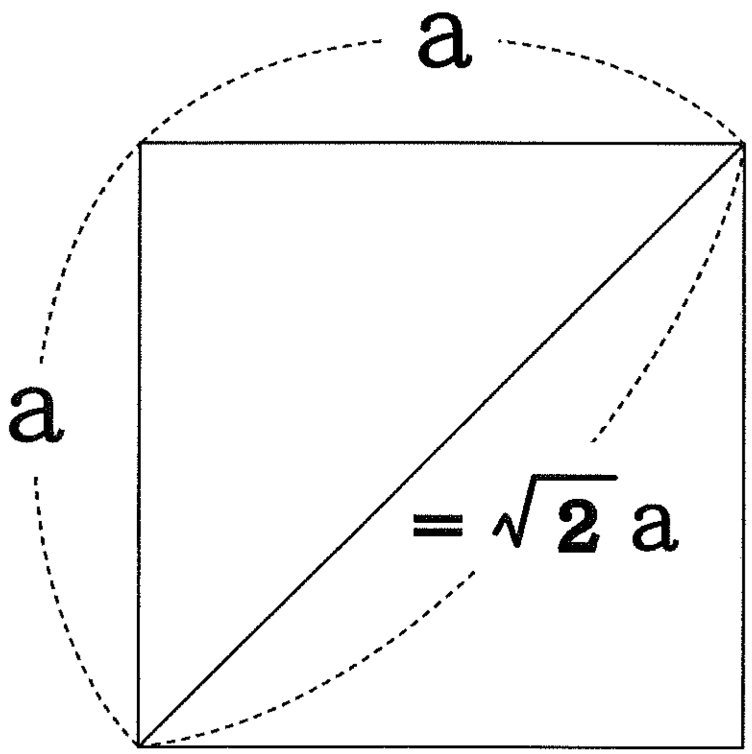
$a = b$ となったときであるから、

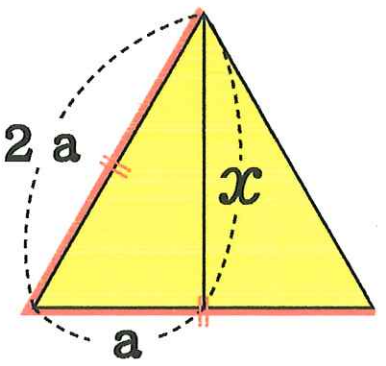
$a^2 + a^2 = c^2$

$2a^2 = c^2$

ゆえに

$$c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$$





$$x^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$$

$$x = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}\,a$$

正三角形を二等分した直角三角形の

斜辺と他の辺は

$2a : a : a\sqrt{3}$

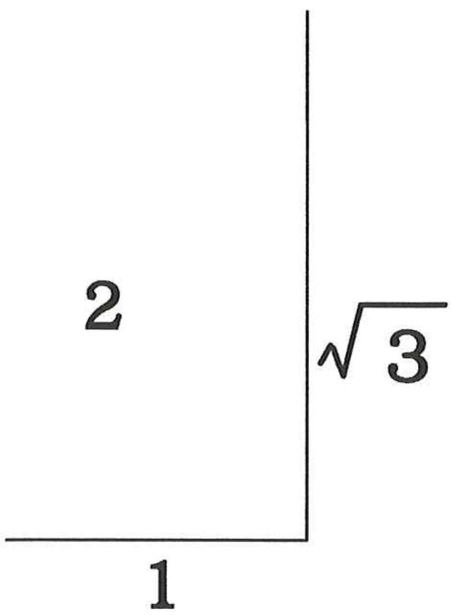
の関係にあります。

長辺は、

つねに

短辺 a の $\sqrt{3}$ 倍に

なっています。



３辺の比を簡単にすると、

$2 : 1 : \sqrt{3}$

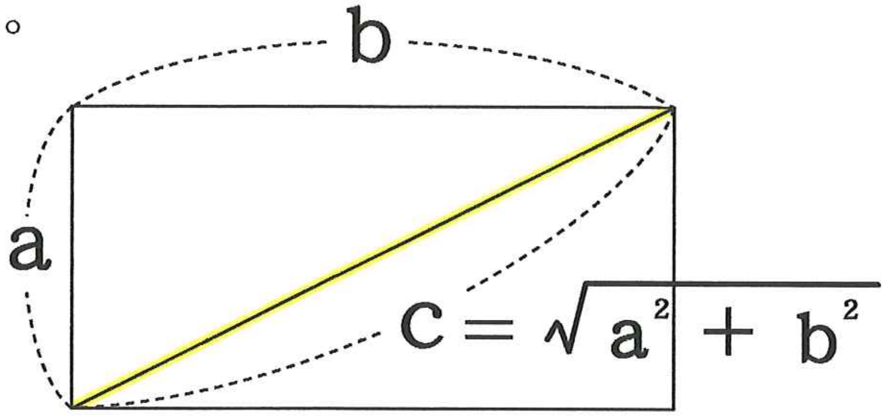
正三角形の高さはつねに、

１辺の長さの 半分の $\sqrt{3}$ 倍

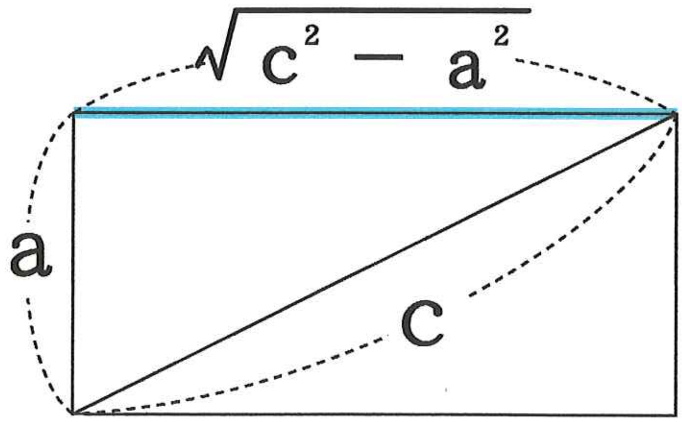
すなわち $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍です。

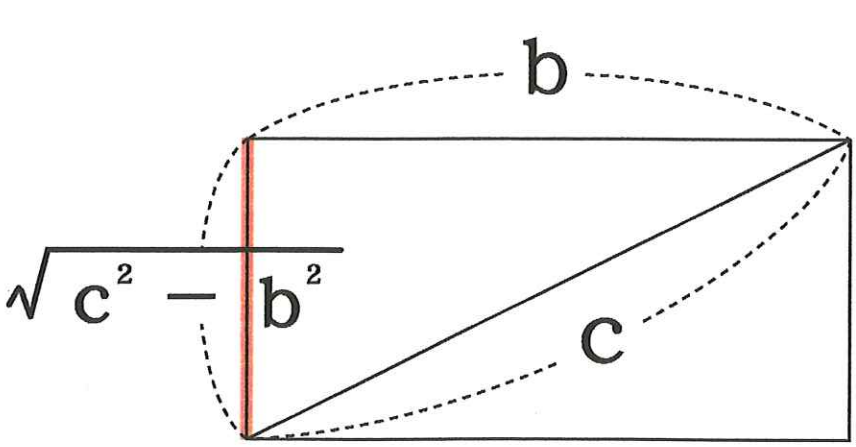
長方形の対角線の長さ

長方形の対角線の長さは
直角三角形の斜辺の辺の長さを求める方法で
得られる。

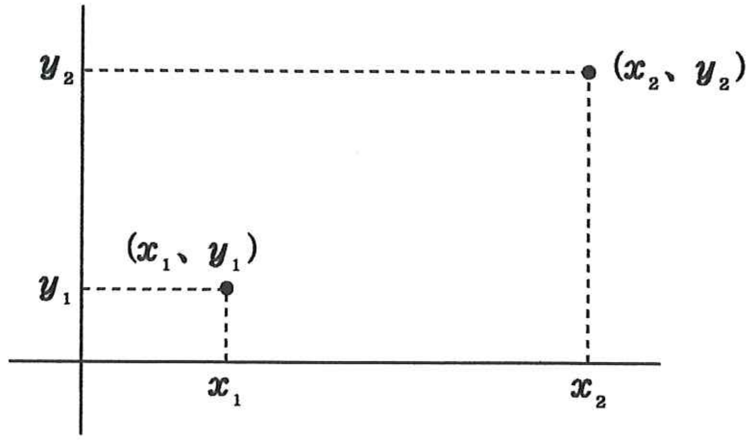


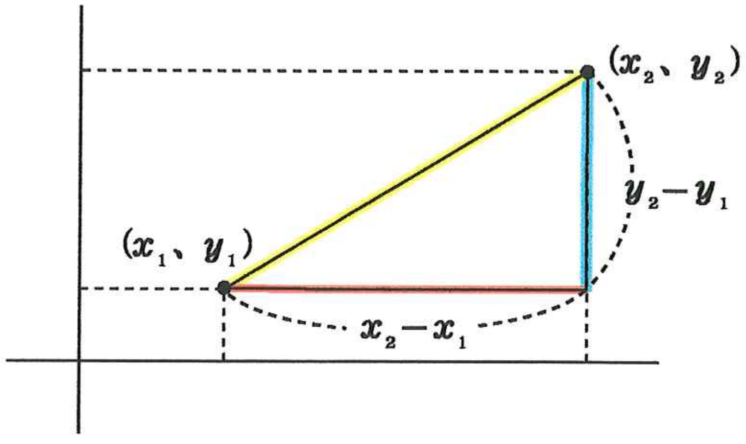
長方形の
対角線の長さと
縦または横の長さが　与えられておれば
長方形の横または縦の長さは
公式を利用して求められることは明らか。





２点（x_1、y_1）、（x_2、y_2）間の距離



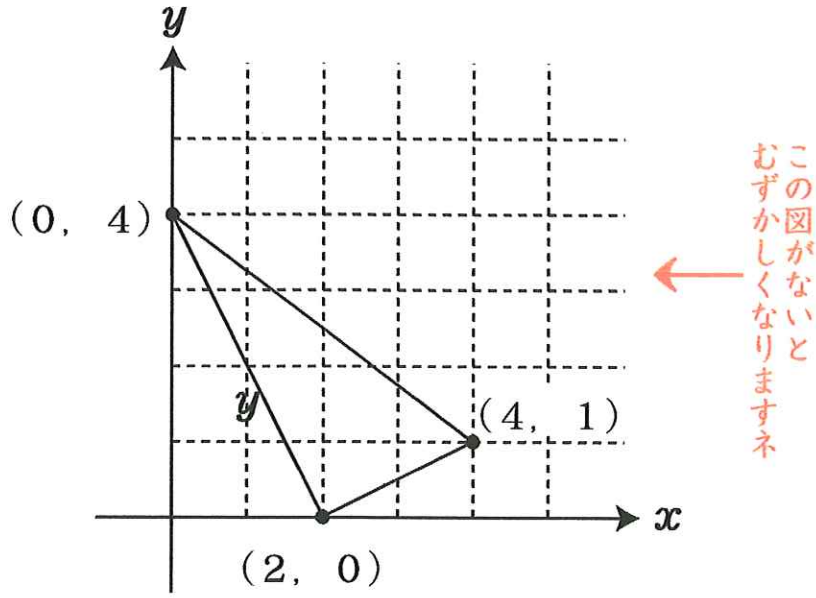


２点間の距離

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

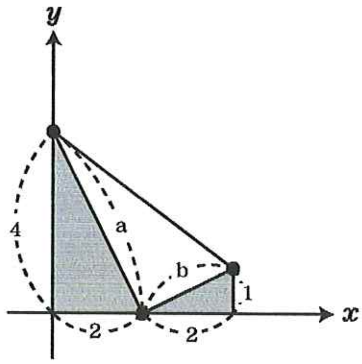
公式としてまとめることができる。

直角三角形であることを示す



上の３点
(０、４)、(２、０)、(４、１)を
結んでできる三角形が
直角三角形である。

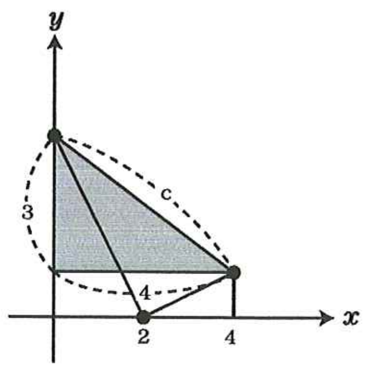
このことは次のように考えます。



直角三角形であることを示すためには、
［**三平方の定理の逆**］の定理から
３辺の長さの関係が、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

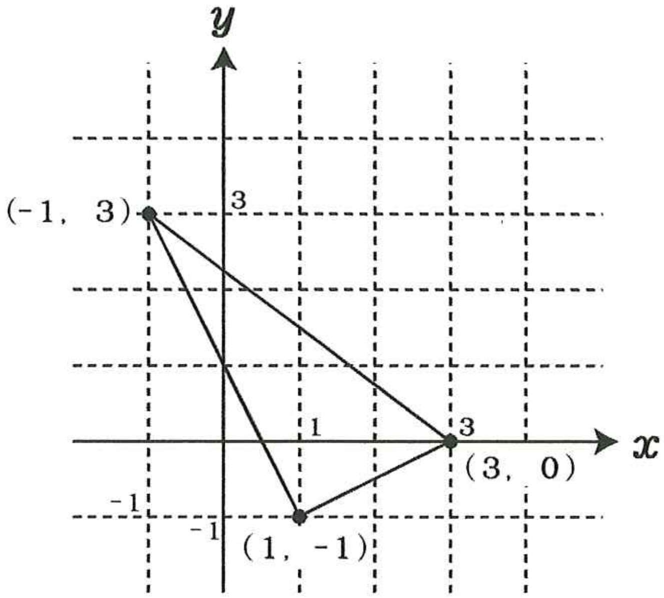
となっていることを示せばよい。



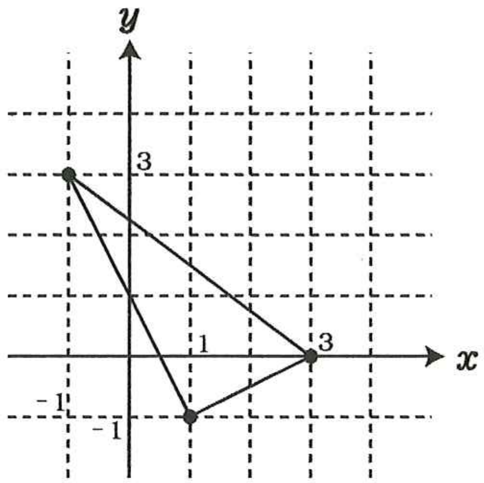
$$a^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$
$$+)\ b^2 = 2^2 + 1^2 = 5\ (+$$
$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

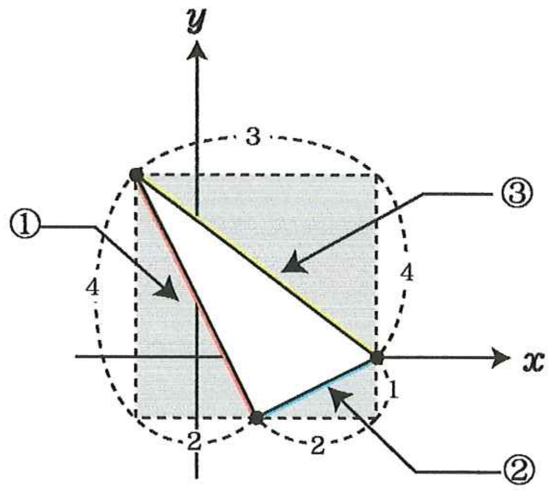
このとき、
［**三平方の定理の逆**］を
説明する必要はない。

次の３点をむすんでできる三角形は直角三角形です。



このことは次のように考えます。





①^2 ＝ 4^2 ＋ 2^2 ＝ ２０

②^2 ＝ 2^2 ＋ 1^2 ＝ ５

③^2 ＝ 4^2 ＋ 3^2 ＝ ２５

①^2 ＋ ②^2 ＝ ③^2 ですから、
上の三角形は直角三角形です。

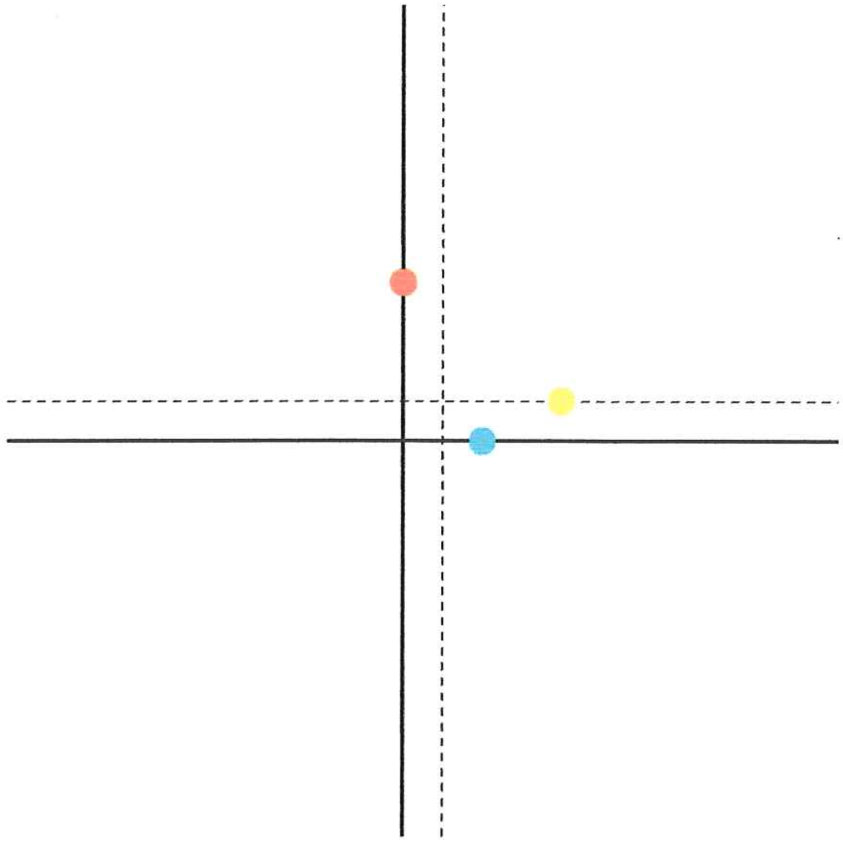
座標を示さず、数値だけの問題 1

３点（0, 4）（2, 0）（4、1）を
結んでできる三角形が
直角三角形であることを示せ。

座標を示さず、
ただ３点だけが与えられたときは、
自分で座標に書き表すのが解くコツです。
座標を書かずにできるようになれば、大したものです。
そのためには、一般式の研究が力を発揮しますが
ここではやめておきます。

自分で座標の上に
直角三角形になる点をとり、
その座標の数値を使って三平方の定理により
直角三角形になることを確かめる。

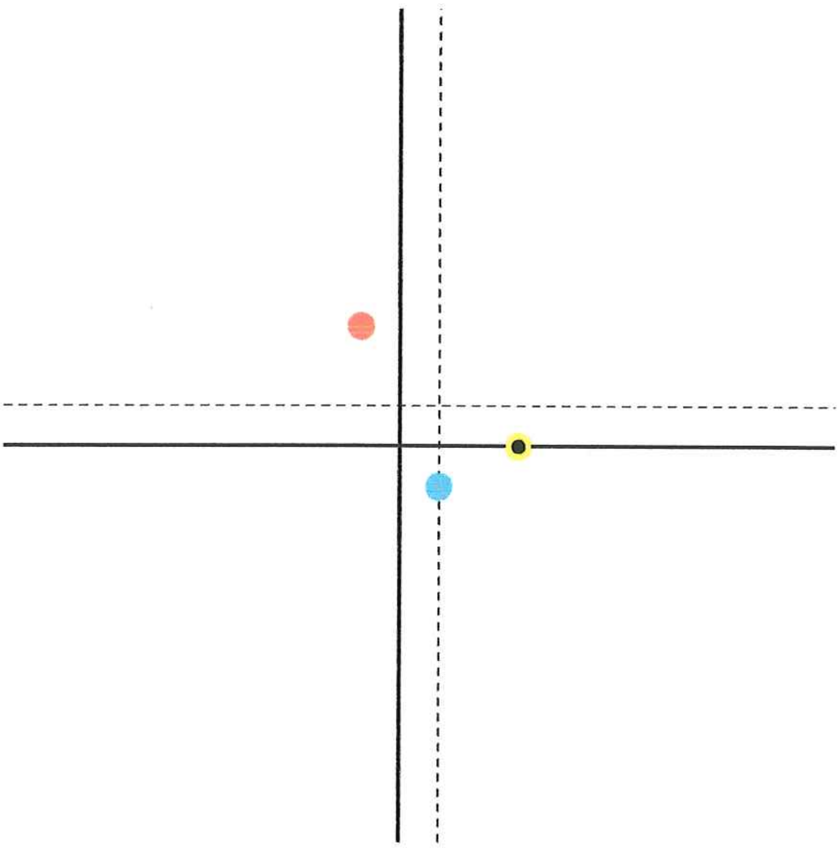
そのような学習法をとると　数学が非常に分かりやすくなります。
ためしてみてください。



座標を示さず、数値だけの問題 2

３点（-１，３）（１，-１）（３、０）を
結んでできる三角形が
直角三角形であることを示せ。

この問題も座標を書けば、
左の問題と同じです。
問題がややこしくなるのは、
与えられる座標が
負の数を多く含むようになるときです。
それを下の座標を使って　自分で作って練習してみてください。



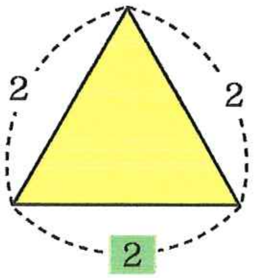
面積を求める
正三角形の面積

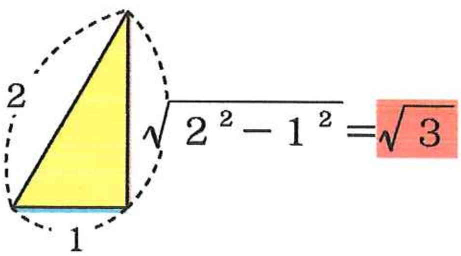
1辺が2㎝の正三角形の面積。

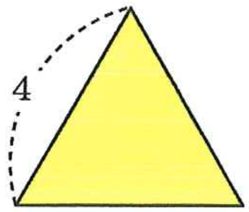
正三角形を二等分した直角三角形の
長辺の長さが
［正三角形の高さ］になることゆえ、

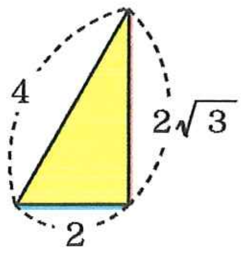
1辺が2㎝のときは

2 ㎝ $\div 2 \times \sqrt{3}$ ㎝ $= \sqrt{3}$ ㎠







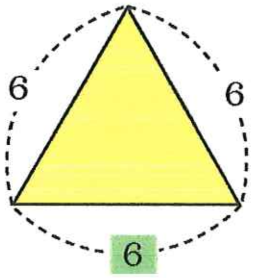


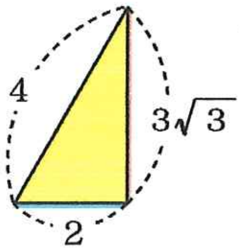
1辺が4cmのときは

$4\text{cm} \div 2 \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{cm}$

面積は$4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$（cm²）

$4 \div 2 \times \sqrt{3}$



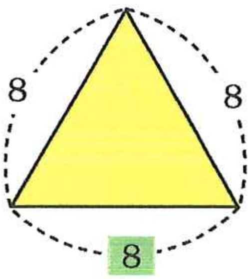


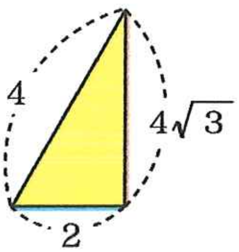
1辺が6cmのときは

$6\text{cm} \div 2 \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{cm}$

面積は$6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 9\sqrt{3}$（cm²）

$6 \div 2 \times \sqrt{3}$





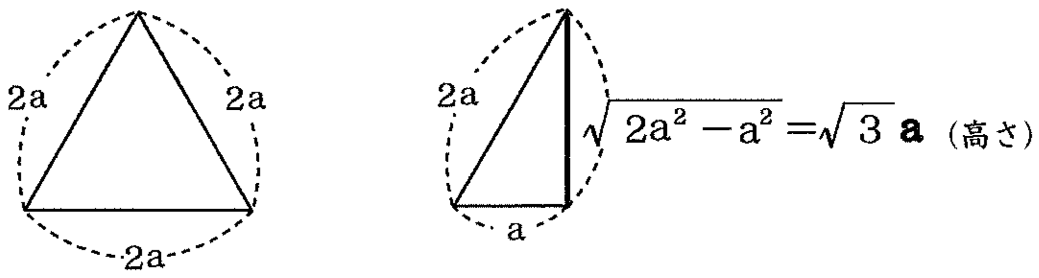
1辺が8cmのときは

$8\text{cm} \div 2 \times 4\sqrt{3} = \sqrt{3}\text{cm}$

面積は$8 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 16\sqrt{3}$（cm²）

$8 \div 2 \times \sqrt{3}$

1辺が2acmである
正三角形の面積。



高さ　$2a \div 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}\,a$

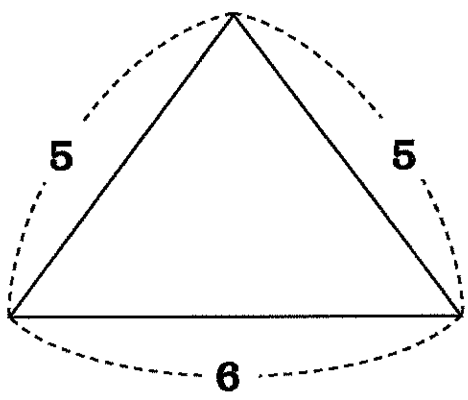
1辺が2acmのときは

$2a \times \sqrt{3}\,a \div 2 = \sqrt{3}\,a^2$ (cm²)

二等辺三角形の面積

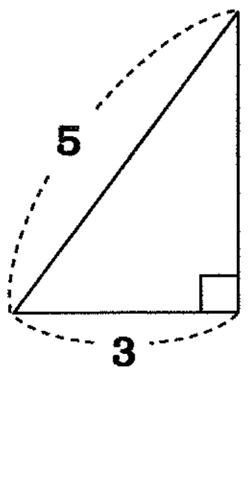
［例題１］

底辺が６㎝、
等しい２辺が５㎝である
二等辺三角形の面積。



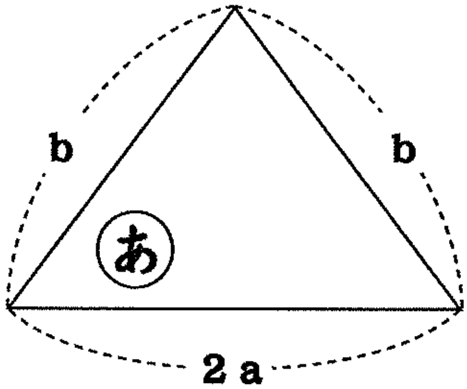
$$6 \times 4 \div 2 = 12$$

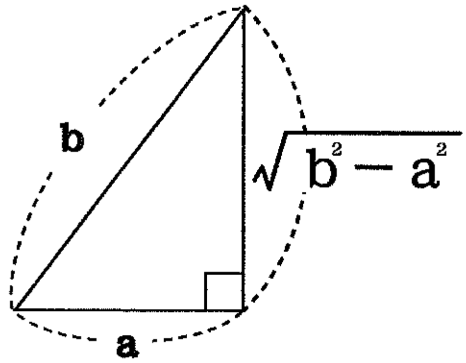
（㎠）



$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

底辺が２ａ㎝、
等しい２辺がｂ㎝である
二等辺三角形の面積。





三角形あの面積

$$= 2a \times \sqrt{b^2-a^2}$$

$$= a\sqrt{b^2-a^2}$$

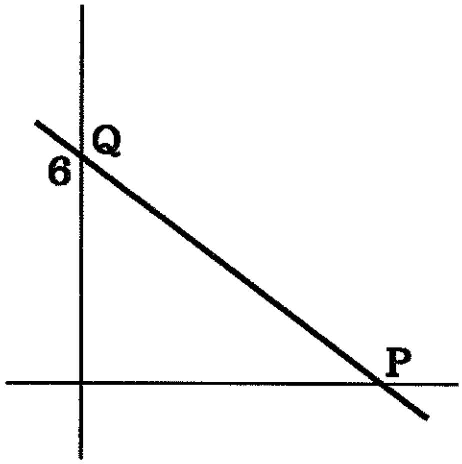
このように、
正三角形や二等辺三角形は、
辺の値を与えられれば、
高さを求めることができます。

その結果、
面積も　求まります。

また、
１辺と面積とが与えられれば、
二等辺三角形の他の辺を
求めることができます。

三平方の定理と一次関数

1



$y = -\dfrac{3}{4}x + 6$ のグラフが

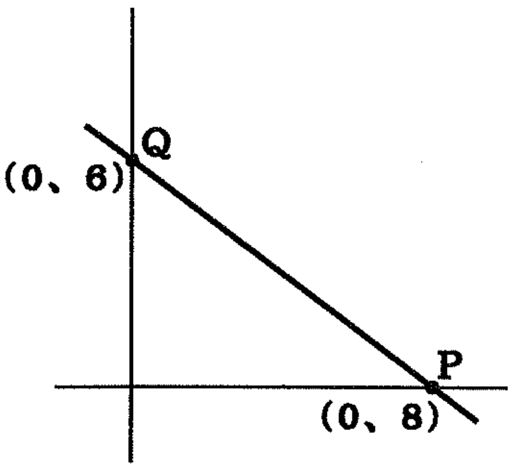
x軸と交わる点をP、

y軸と交わる点をQとするときの

線分PQの長さ。

$y=0$ の時 $x=8$

$x=0$ の時 $y=6$ となります。

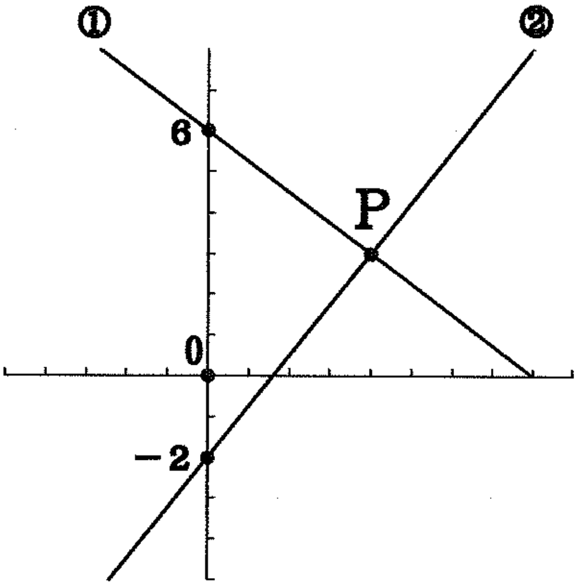


$$\mathbf{PQ} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

① $y = -\frac{3}{4}x+6$ と

② $y = \frac{5}{4}x-2$ との交点Pと

原点Oを結ぶ線分の長さ



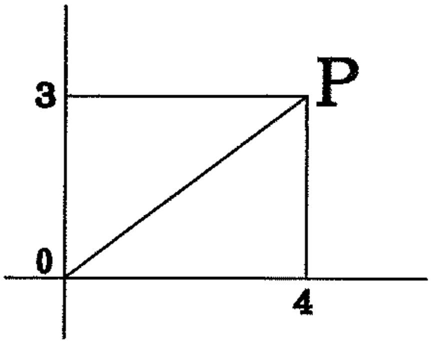
①と②の交点は、連立方程式を解いて、

$y = -\frac{3}{4}x+6$ ……… ①

$y = \frac{5}{4}x-2$ ……… ②

点Pは

$(x = 4 \quad y = 3)$

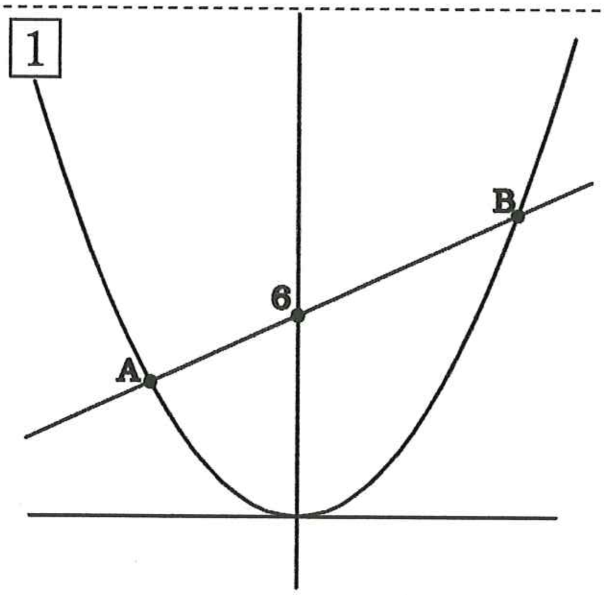


$\mathbf{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

三平方の定理と二次関数

一次関数のグラフと
２次関数のグラフとの交点をＡ、Ｂとするとき、
線分ＡＢの長さを求める問題は、
三平方の定理が使えます。

1



$y = x + 6$　のグラフが
$y = x^2$
と交わる点をＡ，Ｂとする時の
線分ＡＢの長さを求める。

まず交点を求めますから

$y = x + 6$ と
$y = x^2$ の
2つの式の
x と y が
一致します。

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^2 \end{cases}$$

よって☆

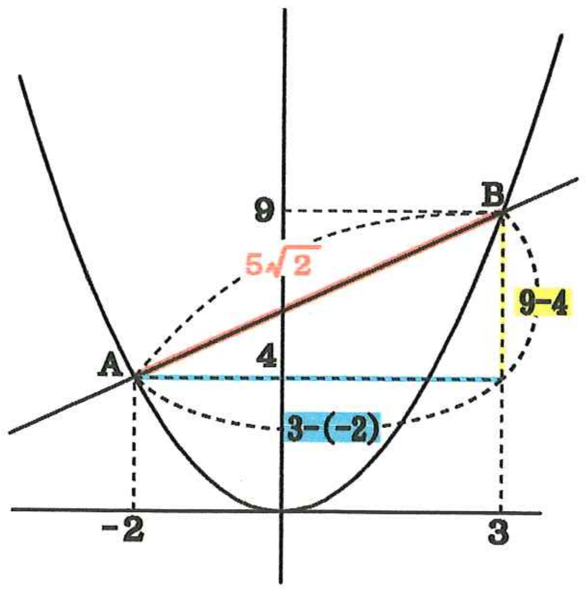
☆ $x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

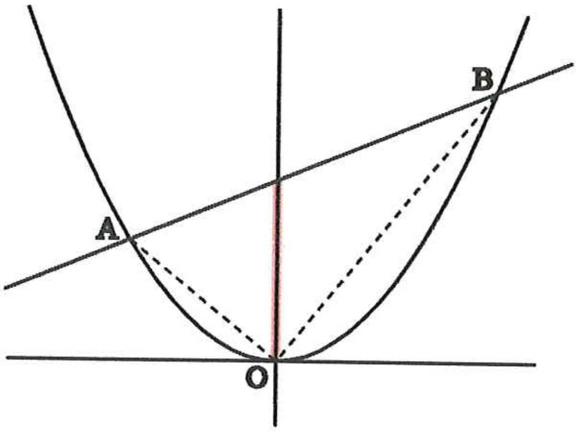
$x = 3$、$x = -2$

$y = 9$　$y = 4$



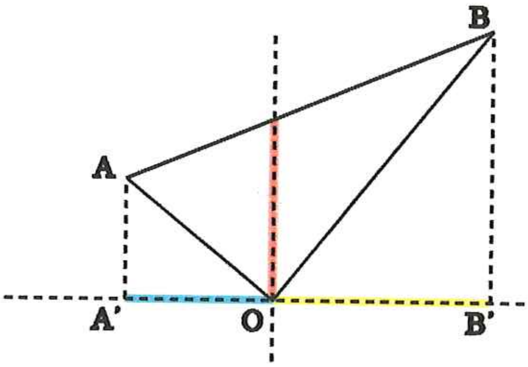
$$\sqrt{\{3-(-2)\}^2 + (9-4)^2}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

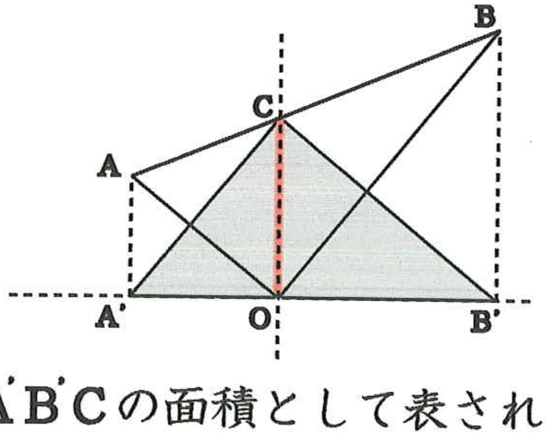


2点**AB**と原点**O**の**3**点を結んでできる
三角形の面積

このとき、
y軸上の切片がわかっているとき、
点**A**、**B**と原点とがつくる三角形の面積は



点**A**を**Y**軸に平行に移動して**A’**　へ
点**B**を**Y**軸に平行に移動して**B’**　へ移せば、
三角形**ABO**の面積は、



三角形**A’B’C**の面積として表されます。

この三角形**A’B’C**の面積を求めるほうが
直接、三角形**ABO**の面積をもとめるより
容易な場合があります。