$\boxed{\text{あ}}$

$\boxed{\text{自然数}}$と名付けられた数は、

その成り立ちから言えば、

$\boxed{\text{人工数}}$と名付けられるべきです。

同じ形・

同じ大きさ・

等質

の物体を作ることが出来るようになった

人類が

その個数を

１、２、３、と数えて見えてくるもの

だからです。

１、２、３の基本にある考えは、

単なる個数ではなく、

１倍・２倍・３倍　という考え方です。

２は、単なる２個ではなく、

２等倍なのです。

もし数える物が、○　■　△など、

形や大きさの違うものを数えると、

２等倍、３等倍の考え方は生まれません。

そこからは、

２等分、３等分という考え方も

生まれません。

自然のままの社会は、

同じ形・同じ大きさの物が

ほぼ有りませんから、

数学の発展は望みにくいのです。

いわゆる自然数は、

同じ形・同じ大きさ・等質の物を

作れるようになった人類の産物です。

ですから、

自然数と呼ぶより

人工数と呼んだ方が

1、2、3の意味を

間違いなくとらえられるのです。

ステップ ア　**等倍**の考え方

次の○を、「１、２」と数えてください。

○→○○
1 → 2

○→○○

1 → 2

○→○○
1 → 2

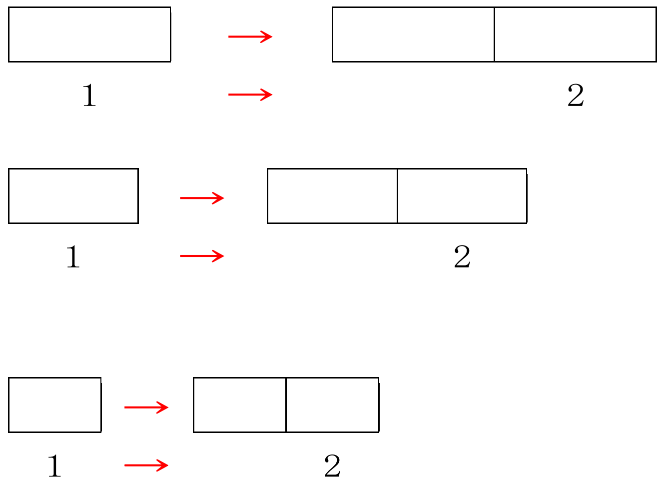
○→○○

1 → 2

○→○○

1 → 2

次の □ を、「１、２」と数えてください。



同じように**個数**を数えていますが、
多種多様な同じ形・同じ大きさを
「1、2」と繰り返し数えるうちに、

上の全ての $\boxed{\rightarrow}$ に

共通する意味は、

２倍

という意味であることに気づきますか。

同様にして
３倍、４倍………の考えが生まれます。

これらの**倍という考え**を
自然数の性質の**根本**として取り上げると
分数計算にも筋がとおります。

あ　自然数の性質

順序を変えて考えてみましょう。

問題１

２は、 何故１の２倍なのでしょうか。

それは、今見たように、

□　→　□□

１　→　２

1、２と数えた形の、

長さや**広さ**が、

□□　が　□　の

２倍だったからです。

問題２

３は、 何故１の３倍なのでしょうか。

それは、

□　→　□□□

１　→　３

1、３と数えた形の

長さや**広さ**が、

□□□　が　□　の

３倍だったからです。

もし、数える物が、
同じ形、同じ大きさをしていなければ、
長さや広さが、
２等倍、３等倍になりません。

ですから、
数学は、人間が、
同じ形・同じ大きさの物を
作れるようになってから始まった
と言っても良いでしょう。

少なくとも
今使われている数学の多くは
そこから始まっています。

ただ、

手を広げた長さを１尋（ひとひろ）

と呼ぶ日本語から考えると、

自然社会にも

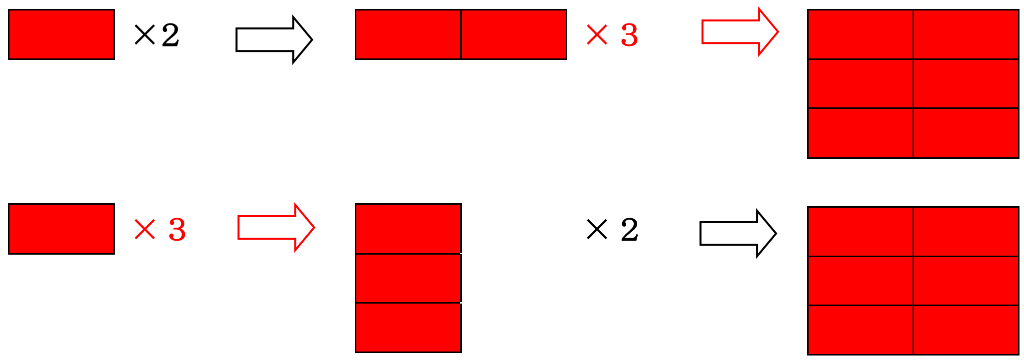
同じ長さを考えることが

出来たかも知れません。

【かけ算の順序は交換可能である】ことを調べてみよう。

左端（はし）の赤い長方形を、「２倍してから３倍した時」と、

「３倍してから２倍した時」は、どちらが大きいですか。



上記の図から明らかなように、

２倍してから３倍しても、３倍してから２倍しても、

結果は**同じ**大きさです。

数式で表せば、$\boxed{\times 2 \quad \times 3}$ は $\boxed{\times 3 \quad \times 2}$ と計算出来ます。

これを、**等倍の順序交換可能の法則**（じゅんじょこうかん）と呼ぶことにしましょう。

付け足し

足し算は、ソロバンで

「御破算（ごはさん）で願いましては」と

言うように、

はじめの数の前にゼロがあります。

例えば、

3+2 は

0 +3 +2 のことと

考えられます。

少し違いますが、同じように、

掛け算

$\boxed{3\times 2}$ は、

３の前に ×（かける）があり、

$\boxed{\times 3 \ \ \times 2}$

さらに、

1 $\boxed{\times 3 \ \ \times 2}$、または

● $\boxed{\times 3 \ \ \times 2}$ のことと

考えられます。

自然数

１，２，３は、

１倍、２倍、３倍する

意味があります。

二十が**十の２倍**であるように、

二百が**百の２倍**であるように、

二千が千の２倍であるように、
さらに、

二個が一個の２倍であるように、

自然数は、**そのままで**、

何倍かを表す数

と考えると

問題なく

分数につながります。

$\boxed{\text{３倍の２倍}}$は$\boxed{\text{６倍}}$です。

$$\boxed{\times 3 \times 2} = \boxed{\times 6}$$

$\boxed{\text{５倍の２倍}}$は$\boxed{\text{10倍}}$です。

$$\boxed{\times 5 \times 2} = \boxed{\times 10}$$

自然数は、

×4　＝　×2　×2
×6　＝　×2　×3
×8　＝　×2　×2　×2
×9　＝　×3　×3
×10　＝　×2　×5
×12　＝　×2　×2　×3
のように、

２つ以上の自然数の

かけ算で表せる数と、

×2
×3
×5
×7　のように、
２つの自然数の

かけ算で表せない数

に分けることができます。

ついでながら
×6の６は
6＝2×3ですから、

$$\times 6$$
$$=\times(2\times 3)$$
$$=\times(3\times 2)$$

２倍してから３倍しようが、

３倍してから２倍しようが

掛け算の順序というのは

６の内部の問題です。

100までの自然数を、

掛け算で出来ない数と

掛け算で出来る数に

分けてみましょう。

掛け算で出来る数は、
掛け算であらわしてみましょう。

1を掛け算で出来ない数の中に入れると
3＝1×3のように、
どの数も掛け算で出来る数になるので
別にします。

かけ算で出来ない数を
赤色で表しています。

	A	掛け算で出来る数
2	2	
3	3	
4		2×2
5	5	
6		2×3
7	7	
8		2×2×2
9		3×3
10		2×5

11	11	
12		2×2×3
13	13	
14		2×7
15		3×5
16		2×2×2×2
17	17	
18		2×3×3
19	19	
20		2×2×5

」

21		3×7
22		2×11
23	23	
24		2×2×2×3
25		5×5
26		2×13
27		3×3×3
28		2×2×7
29	29	
30		2×3×5

	A	掛け算で出来る数
51		3×17
52		2×2×13
53	53	
54		2×3×3×3
55		5×11
56		2×2×2×7
57		3×19
58		2×3×3
59	59	
60		2×2×3×5

31	31	
32		2×2×2×2×2
33		3×11
34		2×17
35		5×7
36		2×2×3×3
37	37	
38		2×19
39		3×13
40		2×2×2×5

61	61	
62		2×31
63		3×3×7
64		2×2×2×2×2×2
65		5×13
66		2×3×11
67	67	
68		2×2×17
69		3×23
70		2×5×7

41	41	
42		2×3×7
43	43	
44		2×2×11
45		3×3×5
46		2×23
47	47	
48		2×2×2×2×3
49		7×7
50		2×5×5

71	71	
72		2×2×2×2×3×3
73	73	
74		2×37
75		3×5×5
76		2×2×19
77		7×11
78		2×39
79	79	
80		2×2×2×2×5

81		3×3×3×3
82		2×41
83	83	
84		2×2×3×7
85		5×17
86		2×43
87		3×29
88		2×2×2×11
89	89	
90		2×3×3×5

91		**7×13**
92		2×2×23
93		3×31
94		2×47
95		5×19
96		2×2×2×2×2×3

97	97	
98		2×7×7
99		3×3×11
100		2×2×5×5

2 から 100 までの間に

かけ算で出来ない数は、
24 個あります。

かけ算でできる数は
75 個です。

上の表を

速やかに言えるように練習しなさい。

	A	掛け算で出来る数
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		

41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		
50		

	A	掛け算で出来る数
51		
52		
53		
54		
55		
56		
57		
58		
59		
60		

81		
82		
83		
84		
85		
86		
87		
88		
89		
90		

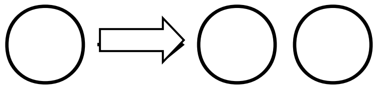
61		
62		
63		
64		
65		
66		
67		
68		
69		
70		

91		
92		
93		
94		
95		
96		
97		
98		
99		
100		

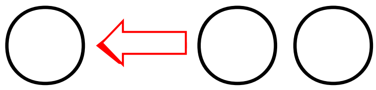
71		
72		
73		
74		
75		
76		
77		
78		
79		
80		

ステップ $\boxed{イ}$　わり算の考え方

古代に既に、



この **２等倍**に対して、



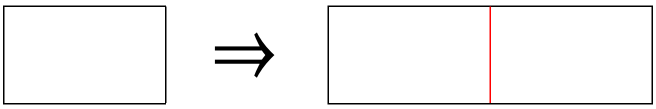
逆の考え方、

つまり、

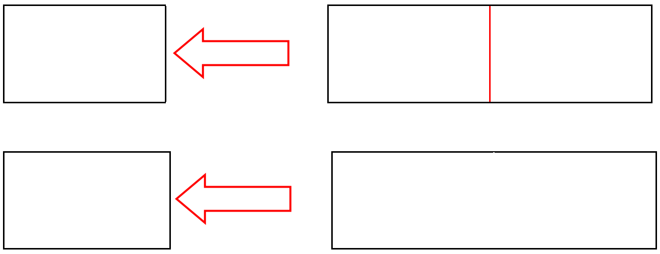
２等分が

考えられ始めていたでしょう。

○でなく、レンガ状のもので考えてみよう。



⇒ の**逆**としての



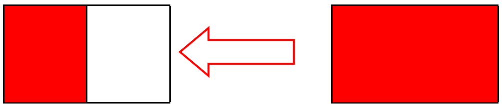
が考えられます。

初めは、

２倍した物を２等分することからの

÷２であったでしょうが、

進んで、



初めの１個を２等分する÷２に
進むでしょう。

このような形で、
２等分の考え方が出来ていくことは
非常に**自然**です。

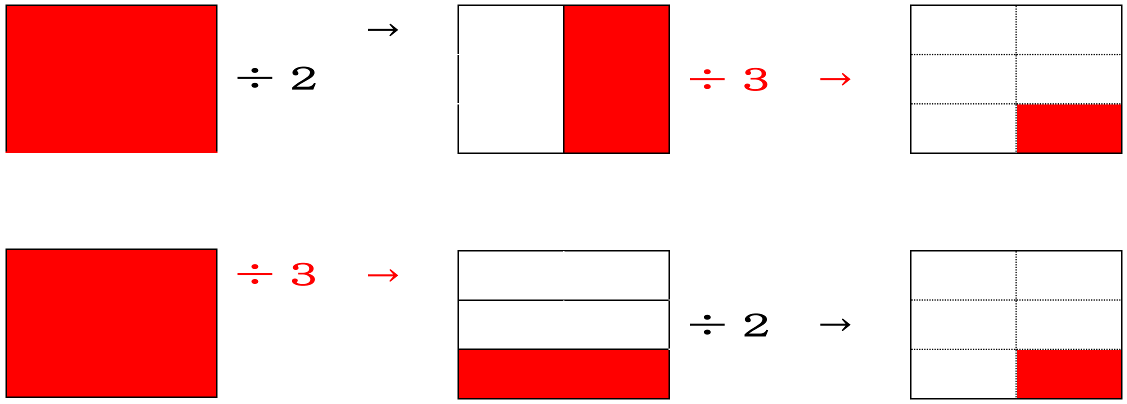
どのように考えてなのか、
正確なところはわかりませんが、
今から 5000 年も前の古代エジプトに、

２等分、３等分を

２　３　と表す

分数　が使用されていました。

【等分の順序は交換可能である】ことを調べてみよう。



上記の図から明らかなように、$\boxed{\div 2 \quad \div 3}$は

$\boxed{\div 3 \quad \div 2}$と計算出来ます。

これを、**わり算の順序交換可能の法則**

と呼ぶことにしましょう。

÷６の６は、

さきに考えたように、

６＝２×３ですから

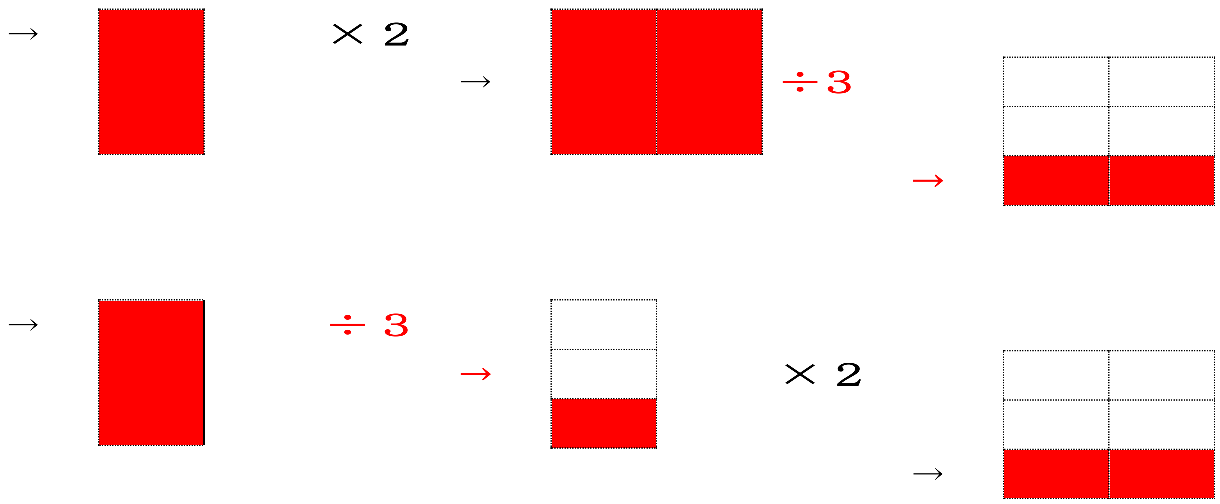
　÷6
＝÷(2×3)
＝÷(3×2)

ですから、
２で割ってから３で割ろうが
３で割ってから２で割ろうが
割り算の順序というのは
６の内部の問題に過ぎない
と考えられます。

ステップ$\boxed{\text{ウ}}$：【かけ算・わり算の混合】

【かけ算・わり算の順序も交換可能である】

かけ算・わり算の
演算順序交換可能の法則



上記の図から明らかなように、

$\boxed{\times 2 \quad \div 3}$ は

$\boxed{\div 3 \quad \times 2}$ と計算出来ます。

これを、

等倍・等分の順序交換可能の法則

と呼ぶことにしよう。

小学校では、

掛け算は**交換できる**が

6×2＝2×6、

割り算は**交換できない**

6÷2≠2÷6

と**理解**されています。

それは、みなさんもご承知の通り

記号×の**前後の数字**を

入れ替えて計算してもよいが、

記号÷の**前後の数字**を

入れ替えては計算できない

と言っているのです。

しかし、

記号÷は、

÷の前後の数を結びつける

のではなく、

後ろの数と結び付いている

と考えてみましょう。

6÷2

の６の前に記号はありませんが、

これは、前に記号がなくとも、

数は倍数であるという基本にのっとって

×6を表していると考えると、

前にみたように、

等倍・等分の順序は交換できるので、

$$
\begin{aligned}
&\quad 6\ \boxed{\div 2}\\
&=\times 6\ \boxed{\div 2}\\
&=\boxed{\div 2}\ \times 6
\end{aligned}
$$

が可能になります。

例えば、

$$4 \times 6 \div 2 = 12$$

$$4 \div 2 \times 6 = 12$$

÷2 は、×6 の前に持ってこられます。

6÷2 と 2÷6 は等しくない、
すなわち、

$$6 \div 2 \neq 2 \div 6$$

よりも、こちらの方が大切な考えです。

ついでながら、

数学は、
「かけて１になる２つの数を
互いに**逆数**」
と定義します。ですから

$\boxed{\frac{2}{3}}$ の**逆数**は $\boxed{\frac{3}{2}}$ です。

しかし、元は、昔は、初めは

$\boxed{\times 2 \text{ の逆数}}$ は $\boxed{\div 2}$

$\boxed{\div 3 \text{ の逆数}}$ は $\boxed{\times 3}$

だったのかも知れません。

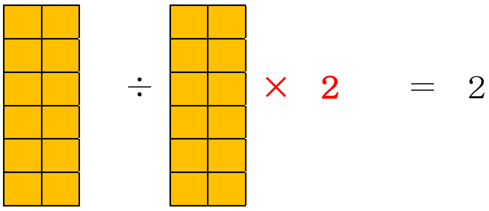
$\boxed{\times 2 \ \div 3}$ $\boxed{\text{の逆数}}$ は

$\boxed{\div 2 \ \times 3}$

だったのかも知れません。

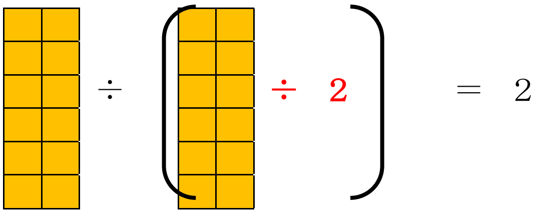
ステップ$\boxed{\text{エ}}$　$\boxed{\text{結合の法則}}$

これが少し難しい。



左の計算を数式に表すと

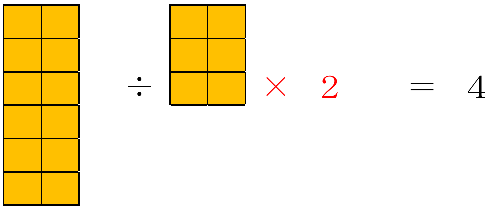
$$12 \div 12 \times 2 = 2$$



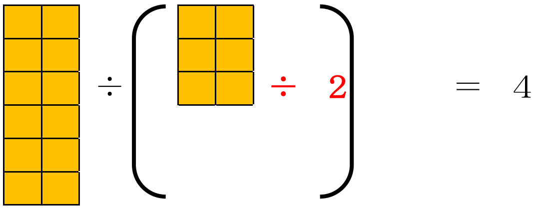
$$12 \div (12 \div 2) = 2$$

割る大きさを２分の１にすると、
商は２倍になる

もう一つ類例を示します。



$$12 \div 6 \times 2 = 4$$



$$12 \div (6 \div 2) = 4$$

割る大きさを２分の１にすると、
商は２倍になる

割る大きさを２分の１にすると、商は２倍になる。

これが、÷分数の説明に必要な考えです。

分数乗除で難しいのはこれだけ、と言っても差し支えありません。

あとは、表記法だけの問題です。

ステップ$\boxed{\text{コ}}$　$\boxed{\text{分数乗除}}$へのステップ

$\boxed{\text{分数の乗除}}$は

$\boxed{\text{自然数乗除}}$の**表記法の違い**だけの問題であると考えましょう。

$\boxed{\times 2\ \ \div 6}$と$\boxed{\div 6\ \ \times 2}$とは、

先に見たように、掛け算と割り算との順序を入れ替えただけの式です。

これを、次のように変化させると、分数乗除の法則が見えてきます。

$\times 2\ \div 6 = \div 6\ \times 2$		
$=\times(2\div 6)$ 2÷6 を英語風に表すと $=\times 2/6$ 2/6 を分数で表すと $=\times\dfrac{2}{6}$	$=\div(6\div 2)$ 6÷2 を英語風に表すと $=\div(6/2)$ 6/2 を分数で表すと $=\div\dfrac{6}{2}$	$\div 6\times 2=\times 2\div 6$ **上の等式から** **左の式のように変化して** $\div\dfrac{6}{2}=\times\dfrac{2}{6}$ ＊分数で割る計算が、 逆数を掛ける計算に なっています。

つまり、分数は本来、自然数の乗除の複合を表すと考えれば、
自然数の乗除の法則が判れば
分数乗除にそれ以上の問題は何もないのだとわかります。

このようにして、

自然数から**分数に至る道**は**非常に単純明快**なものとなりました。

分数は元々、

等倍・等分の

複合表記法の

一つ

として捉えれば簡単です、

分数が

整数乗除を表しながら、

大きさ

も示すことが出来るのは、

自然数が

等倍を表しながら、

大きさを表せるのと同じ

であると考えると

数全体の流れが自然です。

古代ギリシア風の
自然数を、
個数と**だけ**見ることをやめ、
「**倍数**と見る方法を基本に採用すれば、
（**たぶん**、5000 年前の
古代エジプトやメソポタミアも
そう見ていたと思う）
算数学習はずいぶん**楽になる**と思います。」

どこかで
「数学はいつもどこかで**飛躍がある**」
と読んだことがあり、
うまく前と後の論理が繋がらないとき、
「これが飛躍か」と、私も
無理に納得させていました。

しかし、
「分からないからの飛躍」は、
「昔の誤りを引きずっている」、或いは
「略式で見えなくなっている」
と考えることが必要のようです。

「分数」は、

「自然数と別のもの」

と分類するのでなく、

自然数乗除の複合

と考えれば
カンタンな整数計算の話
となります。

ちょっと刺激的ですがハッキリ言うと、

現代数学は

数は比と言いながら、

自然数の定義が

比になっていません。

たのペアノの公理を参照ください。

似たようなことですが、

乗除は加減に先立つ

と言いながら、

自然数の定義が

加法優先です。

おかしい！ですね。

分配法則

●●●+●●=●●●●●　をふつう

3+2＝ 5

と表すわけですが、

等倍感覚を基準にして考えると、

●●●は ●×3
●●　は ●×2

よって、

●●●＋●●
＝●×3＋●×2
＝●×(3＋2)
＝●　×　5

3 百＋2 百
＝百×3＋百×2
＝百×（3＋2)
＝百×5　　　＝5 百

3 千＋2 千
＝千×3＋千×2
＝千×（3＋2)
＝千×5　　　＝5 千

3 万＋2 万
＝万×3＋万×2
＝万×（3＋2)
＝万×5　　　＝5 万

cm×3＋cm×2
＝cm×（3＋2)
＝cm×5　　　＝5 cm

これを

分配（ぶんぱい） 法則（ほうそく）　と言います

分配法則の元は、
個数を数える時に既に在る
と考えられます。

この時、うれしいことに

個数の順序、

個数の加減、

個数の乗除と

矛盾を起こしません。

分配法則の利用

百や千でなく、
365 や 314 でもこの考え方を使うと、
計算がかんたんになることがあります。

例えば、

$365\times7+365\times3$ ならば、

$365\times(7+3)$

$=365\times10$

$=3650$

のように、計算がかんたんになることがあるのです。

円の面積を求める時にも使えます。

半径８cmの円の面積と 半径６cmの円の面積の合計

$8\times8\times3.14 + 6\times6\times3.14$

$=64\times3.14 + 36\times3.14$

$=3.14\times(64+36)$

$=3.14\times(100)$

$=314$

まとめてみると次の通りです。

あ

ステップア　等倚*

1、　2、　3　とは
1倍、2倍、3倍のことです。

*1倍のことを「等倍」ということがありますが、
ここでは[等分の逆]としての「等倍」です。
等倍の順序は変更できます。

ステップイ　等倍の逆
等分

等分の順序は変更できます。

ステップウ

等倍・等分の混合

等分することと、
等倍することとの
順序は入れ替えられます。

ステップエ

等分・等倍の複合

次のことが、分数乗除を解き明かします。

$\div 6 \div 2$
$= \div (6 \times 2)$

$\div 6 \times 2$
$= \div (6 \div 2)$

ステップオ

等分・等倍の複合と

表記法

等分と等倍の表記法は
いろいろ変化します。

整数乗除の表記法が変化して

分数・小数・割合

が出来ます。