D-$\boxed{\text{か}}$　数直線の発明から生まれる数

$\boxed{1}$ 位置としての数の発見や順序

$\boxed{2}$ ０の発見

$\boxed{3}$ 大きさとしての数

$\boxed{4}$ 右向き・左向きの線分（カキ参照）

$\boxed{5}$ 概数

$\boxed{\text{カ}}$　足し算

$\boxed{\text{キ}}$　引き算

$\boxed{\text{ク}}$　加減混合　A +5 −2＝A　−2　+5

$\boxed{\text{ケ}}$　加減複合　A－(10 −1）＝A−10+1

$\boxed{\text{コ}}$　加減複合の表記法の色々

数直線の発明は、

数学の発展の大きな基です。

実に偉大な発明です。

1

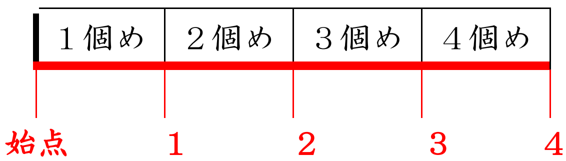
古エジプトやメソポタミアは
レンガを焼きました。

レンガ状のものを

１個	２個	３個	………

と、くっつけて並べて数えていくと、

始点からの個数が距離として認識され、



のような赤い数直線が生まれます。

このように して、

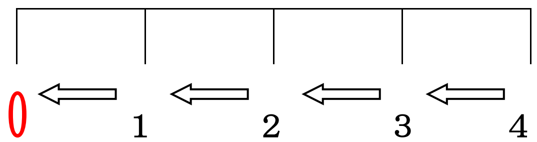
位置としての数

が生まれた、と想像しても許されるでしょう

2

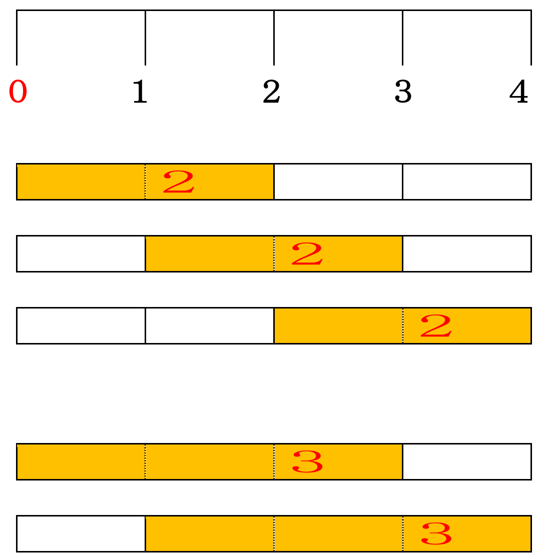
0 の発明

そうすれば、
始まりとして、
始点をどう表すかが考慮され
インドで**発明**されたように、
0 に到達するのも自然に見えてきます。



$\boxed{3}$

大きさとしての数。



どれもが同じ大きさの
2 であったり、3 であったりすること
が認められるようになります。

これは、

粒々(つぶつぶ)のような個数を数える時にも

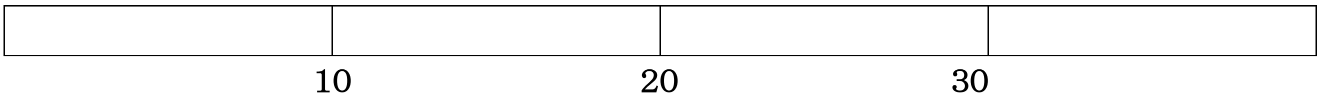
似たようなことは起こります。
しかし、
線分図ほど明確には
大きさをあらわしません。

また、
次の**方向性のある大きさ**は
数直線に特有です、と言えましょう。

3

がいすう
概数 およその数

およその数は、数直線のうえで、どちらに近いか、で考えると判りやすい。



11 から 29 までの数が、
10 に近いか、20 に近いか、30 に近いか、と考えてみよう。

14 は、10 から 4 の距離。20 から 6 の距離。10 に近い。
15 は、10 から 5 の距離。20 から 5 の距離。10 と 20 から等距離です。
16 は、10 から 6 の距離。20 から 4 の距離。20 に近い。

24 は、20 から 4 の距離。30 から 6 の距離。20 に近い。
25 は、20 から 5 の距離。30 から 5 の距離。20 と 30 から等距離です。
26 は、20 から 6 の距離。30 から 4 の距離。30 に近い。

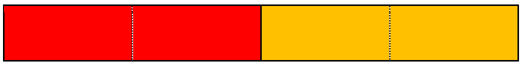
問題は、10 と 20 から等距離にある 15 をどちらに近いと言うか、
20 と 30 から等距離にある 25 をどちらに近いと言うか、
だけです。
大きく見せたい人々の習慣にしたがって、
大きい方に近いことにします。

真ん中以上は、大きい方にまとめ、
真ん中より小さい（未満の）ところは、小さい方にまとめます。
一つ下の位の 5 が分かれ目ですから、
一つ下の位の 5 以上が大きい数にまとめられ、
一つ下の位の 5 未満が小さい数にまとめられます。

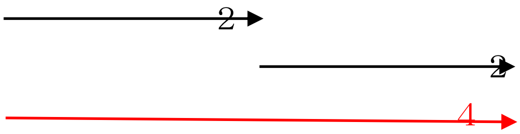
ステップ カ 足し算

$\boxed{2+2=4}$ は

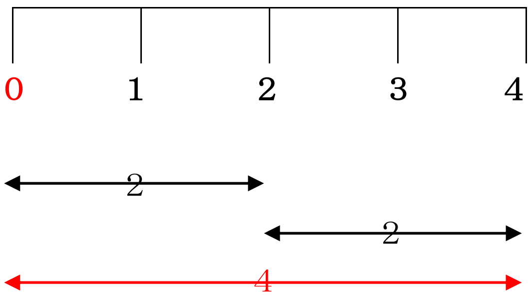
どのようなイメージでしょうか。



でしょうか。



でしょうか。



でしょうか。

色々に考えられるのですね。
数は、いろんな意味がある、
あるいは生まれてくる
と考えられます。

もちろん、
２個+２個のように、
個数で考えることも出来ます。

上のどの場合も $\boxed{2+2\ =\ 4}$
と表されます。

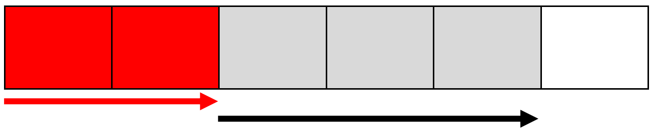
数は、
出来方の元を探ると
色々な意味があるのですが、
形式的には
2+2＝4
という一つの型におさまります。

それゆえ、
「数学は形式だ」
とも言われるのですが、
数学は知らず、
算数の理解のためには
元に戻って
数の出来方を考え、
色々な意味がある
と見ることが大切です。

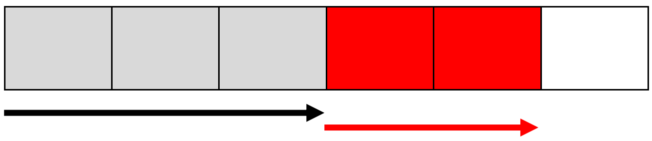
足すことの順序は交換可能です

下の図から明らかなように、

+2　+3



＝+3　+2



数学は、『図から明らか』
と言うのを超えて、
言葉で説明しようとする傾向があります。

算数を学ぶ皆さんは、

「図から明らか」を

自信をもって使いましょう。

ステップ キ　引き算

右と**左**のような

逆向きという考え方は

分かり易いですね。

算数を考えるとき

非常に

生産的です。

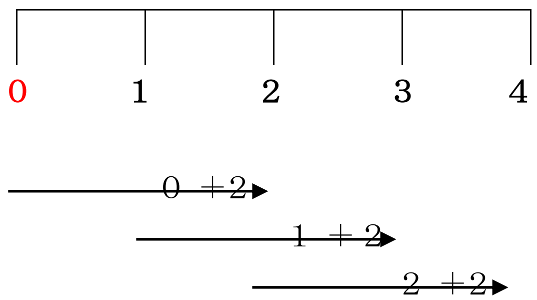
方向の有る数。

はじめは勿論、ステップ カ のように、

足す数としての**右向きの数**が

うまれたのでしょう。

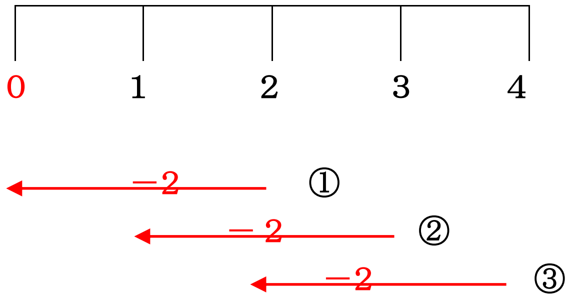
次の図を見てください。



次いで、

引く数としての**左向きの数**

が生まれることは想像できますね。



① 2−2=0

② 3−2=1

③ 4−2=2

先ず初めに、

位置としてのゼロ

が考え出されたのでしょうが、

その後、

レンガを一つずつ取り去っていった時、

何も無くなった状態について

ゼロ！と考えることでしょうね。

位置としての**ゼロ**と

なにも無い大きさとしてのゼロが

不思議にすんなりと判ります。

引くことの順序は交換可能です

例えば、

5 -1 の「$-$」は

5と1を結びつけているのでなく、
「後ろの1にくっついて働く記号」と考え、
「-1」をセットに考えます。

みなさんは

5 -3 -2 と

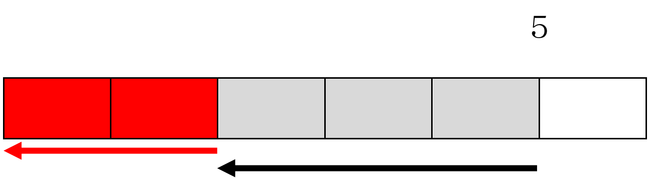
5 -2 -3 が一致することの

説明に図も類例も必要ないですね。

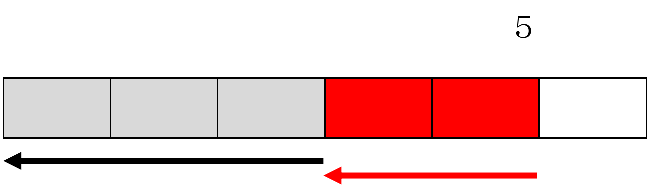
しかし、念のために次に図を見ましょう。

下の図から明らかなように、

5 -3 -2



$=5$ -2 -3



数学は、『図から明らか』
と言うのを超えて、
言葉で説明しようとする傾向があります。

算数を学ぶ皆さんは、

「図から明らか」を

自信をもって使いましょう。

そうすれば、
算数はよほど解りやすくなります。

ついでながら、
このように図を使えば、
中学数学領域の負の数も
ごく簡単に
その存在を**想像**することが出来ます。
つまり、
0から右へ1、2、3と数えたとしたら、
0から左へ1、2、3　は
どう表しましょうか、
のことなのです。

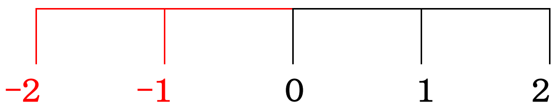
数直線で数を考えるようになると、

右方向の数、

左方向の数などと考え、

逆向きの数

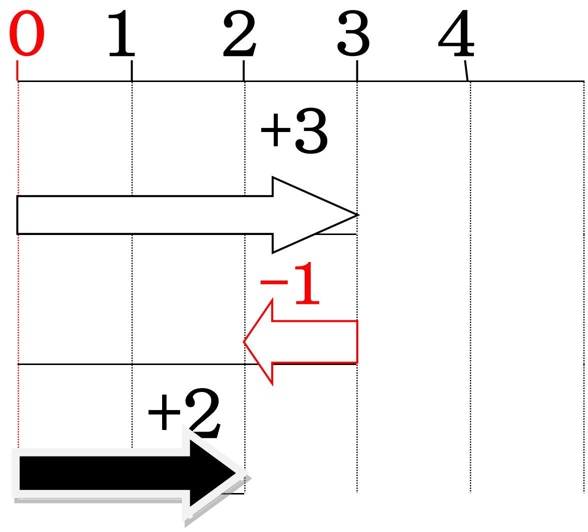
負の数の発見にもつながります。



向きのある線で

$$\overset{\Rightarrow}{3}\quad\overset{\leftarrow}{1} = \overset{\Rightarrow}{2}$$

の加減も可能ですね。



かんたんなようで、

ちょっとややこしい計算があります。

例えば、

1時から4時までは何時間ありますか、

という問いには、

4-1＝3　3時間ですね。

では、

1日(ついたち)から4日(よっか)までは何日有りますか。

計算しなくとも、4日間です。

4－1　ではありませんね。

8時から10時までは、

10－8＝2　2時間。しかし、

8日(ようか)から10日(とおか)までは、3日(みっか)です。

10－8＝2　2日ではダメです。

何故でしょう。

1時や4時は、

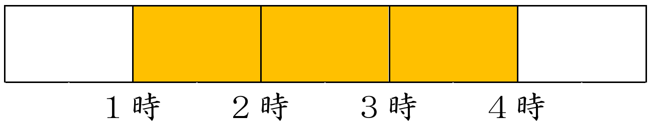
時(とき)の**ある1点**を表していますが、

1日(ついたち)や4日(よっか)は、

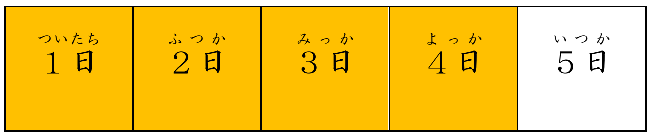
1点ではなく、ある長さが有ります。

線分図で考えると良く見えます。

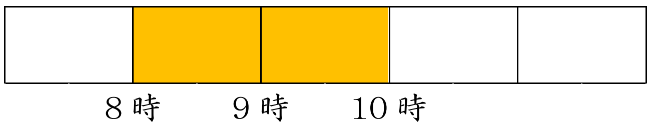
1時から4時の場合

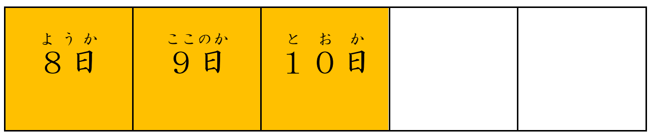


1日(ついたち)から4日(よっか)の場合



同じように、





ステップ ク

たし算と引き算の混合

加法の交換法則とは。

小学校では、ふつう

足し算は
符号＋の**前後の数字**は**交換**できるが、
引き算は、
符号－の前後の数字は交換できない

と理解されています。

しかし、

10　＋3　－2

＝10　－2　＋3　です。

それゆえ、ここで次のように考えます

たす　ひく
＋3　－2　の場合、

＋や－は、
符号の前後の数を結び付けるものでなく、
＋は、後ろの 3 と結び付き、
－も、**後ろの 2** と結び付く、

とします。

そして、

足し算を**足すこと**と呼び
引き算を**引くこと**と
呼ぶことにします。

つまり、

足すことと**引くこと**とは
その**順序**は**交換**できるのです。

例えば、

$$13+2-3$$ は

$$13\ \boxed{+2}\ \boxed{-3}$$ と見て、

「13 に、**2 を足し**、**3 を引く**」と
読むことにします。

そして
「2 を足すこと」と「**3 を引くこと**」
の順を交換し、

$$13\ \boxed{-3}\ \boxed{+2}$$

「13 から、**3 を引き**　**2 を足す**」と
することができる、とするのです。
別に何の問題もありませんね。

そこで、

3 − 2　は、

3の前に＋が有ると見て、

＋3 −2　、

さらに0を補って、

0 ＋3 −2
＝0 −2 ＋3

先の 3−2＝−2+3 は
上のことから明らかになります。

用語として、

加減は順序交換可能

と呼びましょう。

算数の得意な子どもは勝手にやっていますが、

加法の交換法則という名称が、
中学１年生の**負の数の学習**を困らせている例を多々見ます。

まとめると、

	基本	順序交換可能
足し算の順	● ＋2	0 ＋2 ＋6 ＝ 0 ＋6 ＋2
足し算の逆の引き算	● −2	● −2 −6 ＝● −6 −2
足し算・引き算の混合	●＋6−2	● ＋6 −2 ＝● −2 ＋6

ステップ ケ　足し算と引き算の複合

6を足して、
さらに2を足すとき
6と2を足した8を足しても
同じことです。

$$0\ +6\ +2$$
$$=0\ +(6+2)$$

6を足して、次に2を引くとき
6から2を引いた4を足しても
同じことです。

$$0\ +6\ -2$$
$$=0\ +(6-2)$$

6を引いて、さらに2を引くとき
6と2を足した8を引いても
同じことです。

$$●\ -6\ -2$$
$$=●\ -(6+2)$$

ここまでは、かんたんでしょう。
しかし、
次は、ちょっと考えなければなりません。

10を引いてから1を足すとき、
10から1を引いた9を引いても
同じことです。

$$●\ -10\ +1$$
$$=●\ -(10-1)$$

これの感覚が、
乗除のときにも重要になります。

大事なところですから、
次ページで少し練習しましょう。

逆に言うと、

ひく
−9 の代わりに、(9=10−1 ですから)

ひく　かっこ
− (10−1) **として**

さらに、 −10 +1 **と考えると、**

便利な計算がたくさんあります。

例えば、

-98　**ならば、**

− （100−2） ＝−100　+2

とするのです。

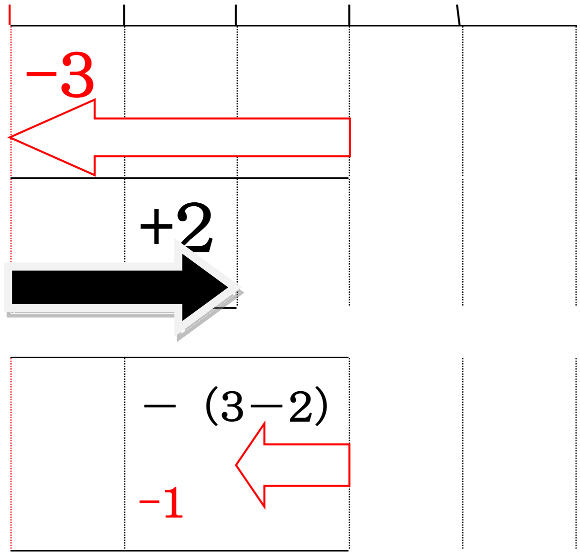
下の説明文を読み、右の計算をしてみてください。

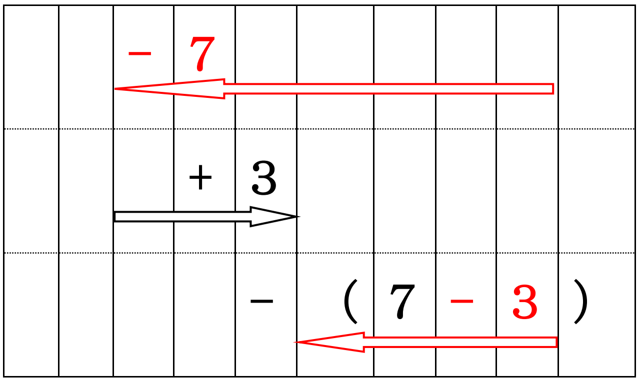
10 から 4 を引いて、1 を足すことは、	10 −4 +1 =7
10 から、4 から 1 を引いた数 3 を引くことと同じ。	10−(4 −1) =7
14 から 4 を引いて、1 を足すことは、	14 −4 +1 =11
14 から、4 から 1 を引いた数 3 を引くことと同じ。	14−(4 −1) =11
15 から 5 を引いて、1 を足すことは、	15−5 +1 =11
15 から、5 から 1 を引いた数 3 を引くことと同じ。	15−(5−1) =11
16 から 6 を引いて、1 を足すことは、	16−6 +1 =11
16 から、6 から 1 を引いた数 5 を引くことと同じ。	16−(6−1) =11
16 から 6 を引いて、2 を足すことは、	16−6 +2 =12
16 から、6 から 2 を引いた数 4 を引くことと同じ。	16−(6−2) =12
16 から 6 を引いて、5 を足すことは、	16−6 +5 =15
16 から、6 から 5 を引いた数 1 を引くことと同じ。	16−(6−5) =15

似た例を自分で作ってみてください。

『そうかなあ』が、

『こうに間違いない』と思えてきます。





ステップ$\boxed{\text{コ}}$：備考

今見てきたとおり、

数える物をバラバラに置くのでなく、

並べて数える方法にすると、

数直線が出来ます。すると、

位置としての数、**大きさ**としての数や、**向きのある数**など

様々な数を**創る**ことが出来ました。数の発明ですね。

中学数学の負の数へもあと一歩です。

最大公約数の求め方

例えば、
大が 18 で
小が８のとき、
18－8＝10 で、
小８が差 10 より小さいので、
最大公約数は、必ず小の８より小さい。

大が 18 で、小が 14 のとき、
最大公約数は、必ず 18－14 の差４より小さい。

これを数直線で説明すると、

18

8

もし、
最大公約数が小の８より大きいと、８の約数になり得ない。

また、

18

14

最大公約数が、18 と 14 の差の４より大きいと、
仮に、４が小 14 の約数であるとしても、
次の数は、18 を超えてしまうので、18 の約数にはなり得ないので、
公約数が、差の４より大きいことは考えられない。

つまり、

最大公約数は、

大－小＝差　とすると、
小が、差より小さい時は、小の約数の中から探し、
差が、小より小さい時は、差の約数の中から探す。要するに、
小と差の小さい方の数の約数の中に最大公約数がある。

だから、
最大公約数を探すときは、小と差の大小を調べて、
小さい方の数の約数の中から探すのである。

この単元をまとめて言うと次の通りです。

数の再発見 か　個数を数えて 数直線へ

未開社会は文明社会になって、
いや、自然中心社会は人工社会になって、

同じ形・同じ大きさ

の物を作り、
その個数を数えることが出来るようになって

等倍の考え方発達の道に入りました。

そして正確な**等分**概念にもたどり着きます。

さらに

くっつけて並べて数え、 **数直線**という 偉大なる発明へと進んだのです。

人工社会は、

同じ大きさ

を数える段階へと進んだとき、

1		1		1		1		
●	＝	●	＝	●	＝	●	………	

どれもが同じ１であることに気付きました。
同じ**大**きさだから、この段階で
どこを数えても**２個は２個**　となりました。

また、
足し算の代わりとしての
掛け算が可能です。

しかし、この掛け算は
数そのものの**倍感覚**ではありません。

自然数の倍感覚は、
「足し算の代わりとしての倍、
　論理の積み重ねの倍」ではなく、
直感的な感覚で倍感覚を
獲得しなければなりません。

詳しくはあの所で述べました。
それを踏まえながらの
かの数直線への道です。