D- c　比を考える

サ

●が５円ならば、
●●は何円か。

	●	●●
	５円	？

？は**何円**か。

●●は、

●の２倍ですから、

値段も２倍、すなわち

５円×2　です。

個数	１個	２個
金額	５円	？

？は**何円**か。

２個は、

１個の２倍ですから、

値段も２倍。すなわち、

５円×2

●が２個は、
●×2=●●　と考えるのは

同じ形・同じ大きさ

を数える時に、
出来上がる考え方です。

注意

この問題を
●●=●+●　と
足し算で考えて、
５円+５円=10円
と考える人は
比を理解できません、

●が５円ならば、
●●●は何円か。

	●	●●●
	５円	？

？は**何円**か。

●●●は、

●の３倍ですから、

値段も３倍、すなわち

５円×３　です。

個数	１個	３個
金額	５円	？

？は**何円**か。

３個は、

１個の３倍ですから、

値段も３倍。すなわち、

５円×３

●が３個は、
●×3＝●●●　と考えるのは

同じ形・同じ大きさ

を数える時に、
出来上がる考え方です。

注意

この問題を
●●●＝●＋●＋●　と
足し算で考えて、
５円＋5 円＋5 円＝15 円
と考える人は
比を理解できません、

1	⇒	2
10	⇒	20
100	⇒	200

上の ⇒ に

共通する意味は何でしょうか。

1が、2になるためには、

+1か、2倍です。

10が、20になるためには、

+10か、2倍です。

この2つをくらべた時、

+1や+10は、

一致していませんから、

⇒の共通の意味にはなり得ません。

⇒に共通するのは

2倍です。

そして、

200も、100の2倍です。

2倍ということが一致していますので、

	1	⇒	2
＝	10	⇒	20
＝	100	⇒	200

のように、＝を使って、

2倍ということが一致していることを表すことにしましょう。

次の　に適当な数をいれなさい。

	5	⇒	10
＝	6	⇒	イ
＝	30	⇒	ウ

イ	ウ
12	60

小学２年生の
かけ算の問題を考えてみましょう。

物を、「1つ、２つ、３つ」
と数える最初に、
「 １つ ＋ １つは ２つ」
「 ２つ ＋1つ は３つ 」だけでなく、

「2つは、１つの２倍、
３つは、１つの３倍」を意識するように
学習してほしいのです。

注意
ちょっと判りにくいかも知れませんが、
数学では、

数の倍関係を考える時、
基にする量を後ろに置く

とする約束が有るのですが、
ふつうに話す日本語では、
そのような約束は有りませんから、
まずは、日本語順で比を考えます。
元にする量を前に置きます。

１本が５円のエンピツは、
２本では何円ですか。

１本	⟹ 本数が２倍 だから	２本
５円	⟹ 値段も ２倍	５円×2

これを、
右側が、本数も値段も
左側の２倍という点が同じなので、

１本	⟹	２本
＝　５円	⟹	５円×2

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、
次のように表すと６年生で学ぶ
比の形です。

１本	：	２本
＝　５円	：	５円×2

⟹も、：も
違いはありません。

１本	：	２本

は、「1本対２本」と読む約束です。

同様に、

１本が５円のエンピツは、 ３本では何円ですか。

１本	本数が３倍	３本
５円	値段も３倍	５円×3

これを、
右側が、本数も値段も
左側の３倍という点が同じなので、

１本	⇒	３本
＝　５円	⇒	５円×3

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、
次のように表すと６年生の課題です。

１本	：	３本
＝　５円	：	５円×3

判っていることの
別の表記法に過ぎないので、
目新しいことでもありません。

１本	：	３本

は、「1本対３本」と読みましょう。

さて、次に、

３年生のわり算

2	÷	1	＝	2
4	÷	2	＝	2
6	÷	3	＝	2

20	÷	10	＝	2
40	÷	20	＝	2
60	÷	30	＝	2

ですから、

	2	÷	1
＝	4	÷	2
＝	6	÷	3
＝	20	÷	10
＝	40	÷	20
＝	60	÷	30

と＝を使って表せますね。

これを覚えておいて、

つぎの文 シ を読んでください。

シ

2本が10円のエンピツは、

1本では何円ですか。

2本	⇒ 本数が半分 だから ⇒ 値段も半分	1本
10円		10円÷2

これを、
右側が、本数も値段も
左側の半分という点が同じなので、

2本	⇒	1本
＝　10円	⇒	10円÷2

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、
次のように表すと6年生の学習課題です。

2本	:	1本
＝10円	:	10円÷2

判っていることの別の表現に過ぎないので、
難しいことはありませんね。

3本が15円のエンピツは、
1本では何円ですか。

3本	⇒ 本数が 3分の1	1本
15円	⇒ 値段も 3分の1	15円÷3

これを、
右側が、本数も値段も
左側の3分の1という点が同じなので、

3本	⇒	1本
＝　15円	⇒	15円÷3

＝を使って表すことにします。

さらに、これを、次のように表すと
6年生の比の学習です。
表し方が新しいだけで、
中身は新しくありません。

3本	:	1本
＝　15円	:	15円÷3

⇒と　:　との違いだけです。
判っていることの別の表現に過ぎません。

ス

今見てきた、

割り算シと、掛け算サの問題を

組み合わせると、

次の問題が解決出来ます。

２本が 10 円のエンピツは、

３本では何円ですか。

２本	３本
10 円	

このままでは、少し難しいですね。しかし、

間に、

「１本は何円か」を組み込みます。

わり算と掛け算の組み合わせです。

２本	１本	３本
10 円		

３本	１本	２本
15 円		

これらをいくつかやった後、

２本		３本
30 円		

を見れば、

間に１本を自分の力で入れられるように

なるでしょう。

間に１本を置くことに気付いた後は、

２本	３本
10 円	

と間に枠(わく)が無い場合も、

１本をはさんで考えられますね。

これを、

２本 ： ３本

＝10 円 ：（　　　）

と表せば、６年生の学習課題です。

何の場合もそうですが、
判っていることを、
新しい表現にすることから始めれば、
問題はずっとかんたんになります。

この様な、
整数の問題から始めて、

2 dL	3 dL
10 円	円

のように、

一方がdℓなどの連続量の問題へ。

次に、両方が連続量の問題へ。

2 dL	3 dL
10 g	g

６年生の課題は連続量、ですが、
以前に学んだことから比の形を学べば、

値段でなく、ｄＬ(デシリットル) やｇ(グラム)も

かんたんに判りますね。

２本	：	３本
＝10円	：	15円

知っていることの別の表現
というだけの話です。

大切なのは、

２本が３本になるのは、

１本増える、

と考えるのでなく、

$$\boxed{\div 2 \quad \times 3}$$

と見ることの訓練です。

２：５は、÷2　×5。

３：２は、÷3　×2.

３：５は、÷3　×5.

そして、どのような数でも同じ、
と考えることができるようになれば、
法則を使って、
かんたんに問題を解くことができます。

$\boxed{2 : m}$ は、

$\boxed{\div 2 \quad \times m}$

さらに、

$\boxed{m : n}$ は、

$\boxed{\div m \quad \times n}$ と、

考えられるようになってほしい。

もし、

$\boxed{m : n}$ は、

$\boxed{\div m \quad \times n}$

とは考えにくい人は、
2：5は、÷2　×5
3：2は、÷3　×2
3：5は、÷3　×5
等の問題を、
数字を変えて
幾つも幾つも試してみてください。

ある時、
『あっそうか』と思える日がきます。

算数学習のコツは、
自分に判る具体数でいくつも練習し、
そこに見えてきた法則が、
どのような大きな数にでも使える、
と思えるまで繰り返すことです。

どのような大きな数にでも使える法則、
と理解できたら、
文字式化の練習をしましょう。

３本	：	２本
＝ 60 円	：	60 円÷3×2

などの同じ型の問題を作って、
幾つも練習していると、
次のような文字の問題でも
答えられるようになります。

m本	：	n本
＝A円	：	A円 ÷m×n

文字で考えられるようになったら、
どのような数になっても、
間違いなくできるようになります。

セ

m	:	n
＝A	:	A÷m×n

ができるようになれば、
いよいよ６年生の課題、

分数表示の学習です。

分数表示の部分は、
D-a で詳しく見ていますから、
そちらで確認してください。

m	:	n
＝A	:	A÷m×n

を

この $\boxed{\div m \quad \times n}$

（$\boxed{\text{わること}}$と$\boxed{\text{かけること}}$の順序は変更できる）

＝　×n　÷m

（÷m（わるエム）は、英語では

（／（パー）mと表す）

＝　×n /m

（/mは、算数では

$\frac{}{m}$ と表すので）

＝　$\times\frac{n}{m}$

÷m　×n が、順序交換で

×n　÷m となるのを除けば、

あとは、表現形式の約束事にすぎない。

次の変化は、
いささか準備が必要です。

$$\div m \times n$$

$$= \boxed{\div(m \div n)}$$

$$= \div(m / n)$$

$$= \div\frac{m}{n}$$

となることの理解は、
分数計算の理解が必要のように
考える人も居ると思いますが、
これも、あくまでも、
整数計算と表記法の問題です。

$$\boxed{\div m \times n}$$

面倒なのは、
上の式が下の式に変わるところだけです。

$$= \boxed{\div(m \div n)}$$

Ｂシリーズの整数編で
数多くの類例を示しています。
そちらで理解してください。

$24 \div 8 \times 2$ と

$24 \div (8 \div 2)$

とが等しいことの理解です。

８で割った商を２倍することと、
割る数の８を２分の１にすることが
同じことになることの理解です。

しかし、
これはかなり手こずる子たちが居ます。

繰り返し、類似の問題を解いて、
実感してもらわねばなりません。

今示したことが出来れば、
÷分数と、×分数の関係が
整数のわり算と掛け算の
組み合わせと同じに過ぎないこと
が判ります。

$$\boxed{\div m \quad \times n}$$

$$= \boxed{\times \frac{n}{m}}$$

と

$$\boxed{\div m \quad \times n}$$

$$= \div (m \ \div n)$$

$$= \boxed{\div \frac{m}{n}}$$

の最後の分数計算どうしは、
元が等しいので、

$$\times \frac{n}{m}$$

$$= \div \frac{m}{n}$$

逆にすれば、

$$\div \frac{m}{n}$$

$$= \times \frac{n}{m}$$

かの有名な、

『割る分数は、
分母と分子を
ひっくり返して掛ける』

理由は、
ここに示されるわけです。
要するに、

$$\times \frac{n}{m}$$

$$= \boxed{\div m \quad \times n}$$

であり、

$$\div \frac{m}{n}$$

$$= \boxed{\div m \quad \times n}$$

つまり、元が同じなのです。

分数は、

整数乗除の複合

と見ることにより
分数演算の不思議は解決されます。

ソ−1

比の値と割合

一般に、

> 比の値とは、
> 比の前項を
> 後項で割った値
> です。

といって、比の値を導入します。

ちょっと頭ごなしで
受け入れがたいのです。
「何故、前項を後項で割るの」
と思ってしまいます。

前項÷後項の計算をして出てきた値は、
何なのでしょうか。
比の値です、では
言葉の言い換えにすぎません。

これは、小学３年生の問題、

> ２本が 10 円の物、
> １本の値段は何円かを
> 10 円÷2 と答える

のと同じ問題をふくんでいます。
計算式上、１本の役割が見えないのです。

2 本 10 円の物 1 本の値段。

これは、

２本	⇒	１本
10 円	⇒	１０円÷2

比では、
２本の２分の１が１本だから、
値段も 10 円の２分の１
と考えるわけですが、

小学三年生の解答式としては、

> 本数の方は当たり前だからとして省略、
> 値段の方だけ立式して示す習慣です。

本数の比関係という隠れた意識が有ること
に気付くかどうか
が算数の得意不得意なのです。

みなさんも、
隠れているものを見つけること
が大切です。

次のように考えてみましょう。

	2	：	3
	÷3	＝	÷3
＝	$\frac{2}{3}$	：	1

後項３を、後項３で割って１。

前項２も、後項３で割って$\frac{2}{3}$。

つまり、

比の後項を、
後項で割り
１とし、

比の前項も
後項で割り、
其の値を比の値と呼ぶ。

比の値とは、

独立した「前項÷後項」ではなくて、

前項	÷	後項	＝	比の値
後項	÷	後項	＝	1

前項も後項も、
後項で割ったときの
「前項の値」と考えれば、

後項を基（もと）（1）にして、

前項の割合であることが
理解されます。

たぶん、
比の値を考え始めたときは
後項のことも考えていたのでしょう。

それが、
１本10円ならば、２本は10円×2
となったように、
略式の好きな数学のいつもの癖で、
後項のことは、言わずもがな、
で略されたのだと思われます。

略された形のままその意味を考えるのは、
かならずしも簡単ではありません。

略さない形で考え、
略してこうなる、
と見ると断然かんたんになります。

今、比の値の説明で、いきなり
比の値が分数になる例を挙げました。
判りにくい人は、
次の問題を練習してください。

	6	：	3
	÷3	＝	÷3
＝	2	：	1

	6	：	2
	÷2	＝	÷2
＝	3	：	1

	12	：	3
	÷3	＝	÷3
＝	4	：	1

新しいことは、
既に知っていることをもとに考えると、
解りやすくなります。

ついでながら、
学習上大切なことは、
どんなに易しく思えても、
一つの例で結論付けない事です。

教科書は、
いきなり結論であったり、
例示一つで結論に至る、のは、
ページ数の問題です。

教科書無償の制度が、
一人歩きして、
望ましい考えの教科書が出来ないシステム
になっています。
一見価値のある制度が、
困った現象の元になっている、
といった例の一つです。

教科書が例示一つの手本になっているので、
以下みんな「右へ倣(なら)え」で、
だれも困ったことだと思いません。
困ったことです。

学校の先生に、
略されたところの説明を期待する、
といったことになっているのかも
知れません。

ソ-2　比の利用

$\frac{1}{3}$m（メートル）が
6gのテープは、
1mは何gか。

少なくとも、
2つの考え方がある。

	$\frac{1}{3}$m	:	1m
＝	6g	:	g

A案

1mの3分の1は、$\frac{1}{3}$m だから、

1mは、$\frac{1}{3}$mの3倍。

だから、重さも3倍で18g。

B案

$\frac{1}{3}$を$\frac{1}{3}$で割ると

1だから、

6gも$\frac{1}{3}$でわって、

18g。

$\frac{2}{3}$ m（メートル）が

12ｇのテープは、

1ｍは何ｇか。

少なくとも、

３つの考え方がある。

A案

	$\frac{2}{3}$m	:	$\frac{1}{3}$m	:	1m
＝	12ｇ	:		:	ｇ

$\frac{2}{3}$mの２分の１が$\frac{1}{3}$mだから、

12ｇを２等分して６ｇ。

$\frac{1}{3}$mの３倍が１mだから、

６ｇを３倍して18ｇ。

まとめて、

12 $\boxed{\div 2 \quad \times 3}$ ＝18

B案

12　÷2　×3……………①

（かけることと割ることの順序は入れかえられるから）

＝12　×3　÷2……………②

（÷2 は、英語風に表すと　/2）

＝12　×3　/2

（/2 は、古代エジプト風に表すと　$\bar{2}$　）

＝12　×3　×$\bar{2}$

（現代算数風に表すと）

＝12　$\boxed{\times\frac{3}{2}}$

①式が②式へ進むところだけが数学的。

あとは、

表現形式だけの問題にすぎない。

まとめると、

$\frac{2}{3}$の**逆数**$\boxed{\frac{3}{2}}$**を掛ける**。

Ｃ案

12　÷2　×3……………①

（2 で割った商を 3 倍することと

割る数の 2 を 3 分の 1 にすることは同じ）

＝12　÷　(2÷3)　……………②

（÷3 は、英語風に表すと　/3)

＝12　÷　(2 /3)

（現代算数風に表すと）

$=12\boxed{\div\frac{2}{3}}$

慣れてくれば、

$\boxed{\frac{2}{3}\div\frac{2}{3}=1\text{だから}}$、

も使えるようになるでしょう。

実は、先に述べたように、

Ｂ式もＣ式も

Ａ案

$12\boxed{\div 2\ \times 3}=18$

の変形に過ぎない。

分数で量が示されると、

かなり難しく感じられますが、

基本は同じです。

次の問題を見てください。

$\boxed{\frac{2}{3}\text{m が }\frac{5}{7}\text{g のテープは、1m 当たり何 g か。}}$

前問と同じように、3 つの考え方がある。

Ａ案

$\frac{5}{7}$g を 2 等分して $\frac{5}{14}$g

$\frac{5}{14}$g を 3 倍して $\frac{15}{14}$g

まとめて、

$\frac{5}{7}\text{g}\ \div 2\ \times 3\ =\ \frac{15}{14}$

	$\frac{2}{3}$m	:	$\frac{1}{3}$m	:	1m
＝	$\frac{5}{7}$g	:	$\frac{5}{14}$g	:	$\frac{15}{14}$g

B案

$\frac{5}{7}$g　÷2　×3……………①

$=\frac{5}{7}$g　×3　÷2……………②

$=\frac{5}{7}$g　×3　/2

$=\frac{5}{7}$g　$\times\frac{3}{2}$

$\frac{2}{3}$の**逆数**

$\frac{3}{2}$**を掛ける**。

C案

$\frac{5}{7}$g　÷2　×3……………①

$=\frac{5}{7}$g　÷（2÷3）　……………②

$=\frac{5}{7}$g　÷　（2 /3）

$=\frac{5}{7}$g $\boxed{\div\frac{2}{3}}$

$\boxed{\frac{2}{3}\div\frac{2}{3}=1\text{だから}}$、

$\frac{5}{7}$g $\boxed{\div\frac{2}{3}}$

B式もC式も

A式の変形に過ぎない。

ソ−3　比の言い方

次は、いささか判りにくい話です。

２dL と３dL の割合を 「2：3」と表し 「二対三」と読みます。 この様に表したものを 「比」と言います。

これが一般の導入の例ですが、
判っている者にだけ判るって感じです。

皆さんは、
比を学んでいますから、
『なるほどね』
と理解できるでしょう。

また一般に、次のようにも言いますが、
注意深くないと、
よく判らないところです。

A	２の３に対する割合を、 ２：３と表します。

A	２の、３に対する割合を、 ２：３と表します。

２のの後ろに、、を入れると、
少しわかりやすくなるかもしれません。

同じことを、

B	３に対する２の割合を、 ２：３と表します。

とも言います。

ＡもＢも、
日本語としては判りにくい表現です。
何故なら、
基本になるものを
後ろに置いているからです。
数学は西洋語中心ですから、
仕方がないのでしょう.

注意深く読むようにしてください。

ソ-4

内項の積＝外項の積

中学でよく使う式です。

1：2＝5：10

内項の積＝2×5＝10

外項の積＝1×10＝10

内項の積と外項の積が一致しました。
しかしこれでは、
何故等しくなるのかが
よくわかりません。

次の例を見てください。

1：2＝5：5×2　　ですね。

内項の積＝　2×5
外項の積＝1×5×2

1：n＝a：a×n　ならば、

内項の積＝a×n

外項の積＝1×a×n

少し飛ばしましょう。

	m	：	1	：	n
＝			a		

とすると、

	m	：	1	：	n
＝	a×m	：	a	：	a×n

それゆえ、

m：n＝a×m　：　a×n　だから、

内項の積

＝n×a×m＝a×m×n

外項の積

＝m×a×n＝a×m×n

分かるか分からないかの境目は、
最後の一般式ではなく、
具体数での自分での計算結果です。
幾つの例を見れば納得できるかは、
人によって違います。
1つで判った、という早とちりの人、
たくさんの類例を見ないと、
安心できない慎重な人、色々です。

$\text{m}:\text{n}=\text{A}:\text{B}$

と表している限り、

$\boxed{\textbf{内項の積＝外項の積}}$の理由は

見つかりません。

『内項の積＝外項の積だから、

ｎ×Ａ＝ｍ×Ｂ』

と宣言されても説明不足ですね。

一般式でも、次のように表せば、

一致することが見えます。

$$\boxed{\text{m}}:\boxed{\text{n}}=\boxed{\text{A}}:\boxed{\text{A}\div\text{m}\times\text{n}}$$

と表せば、

内項の積＝ｎ×Ａ＝Ａ×ｎ

外項の積＝ｍ×Ａ÷ｍ×ｎ＝Ａ×ｎ

として一致します。

分かってしまえばカンタンなことなのに、

なんだか分からないままに使っている人は

かなり多いと思われます。

いきなりの文字式では納得できませんね。

みなさんは数字で確認が必要です。

類題の出番です。

$1:3=5:5\times3$

$1:4=5:5\times4$

$1:6=5:5\times6$

数学は、

幾つもの具体数

で考えることが必要です。

すぐには『判る』と言わない人は、

慎重（しんちょう）なのです。

算数に向いていないわけでは

ありません。

自信をもって、

幾つもの具体例を見ていきましょう。