G-c　比例・反比例

ソ−5

正比例

時間はかなりかかるでしょうが、
次の正比例の定義を暗誦しなさい。

正比例の定義

伴(ともな)って変わる２つの量
ｘとｙがあって、
ｘの値が、
２倍、３倍、……………
となると、
ｙの値も、
２倍、３倍、……………
となる時、
ｙの値は、
ｘに比例する
と言う。

これが、
６年生で学ぶ正比例の定義です。

ｘとｙは目新しいのですが、
内容は珍しくありませんね。

鉛筆の本数が２倍になった時、
鉛筆の代金が２倍になることは、
小学２年生でも知っている話です。

一定の速さで動く乗り物の
時間が２倍になれば
動く距離も２倍になります。

高さが一定の長方形の
ヨコの長さが２倍になれば
面積も２倍になります。

一般的に、
「物を数える時に、
個数が２倍、３倍、……………となると、
重さが２倍、３倍、……………となること
は、誰もが知っていることですね。

同じ形・同じ大きさ・等質の物
を作れるようになった社会になって、
それを数えて数ができています。

「正比例の感覚」は、
同じ形・同じ大きさ・等質の物体
を数える時に既(すで)にできているのですね。

自然数も、
確かに 1+1 は２なのだが、
基本に置くべきは、足し算でなく、
１倍、２倍、３倍などの考えなのです。

G-c　比例・反比例

「なぜ、
足し算より先に掛け算を計算するのか。」
もこれで説明できます！

数の基本を『足し算』で定義していては、
『掛け算を、足し算より先に計算すること』
は説明できません。

世の中に、
足し算より掛け算を先に計算することの
理由が存在しないのは、
『1 を基本に置き、
その足し算で自然数を定義する』からです。

4＋3×2 が 14 でなく、10 なのは、
4＋6 が 10 だからです。
3×2 とは、6 のことなのです。
つまり、

掛け算 3×2 は、

数 6 の

内部の問題なのです。

自然数が、
素数と合成数に分類されるのは、
『(掛け算で出来ない数・素数）と
（掛け算で出来る数・合成数）に
分類されるから』
と考えると説明できます。

素数は今、
『割ることのできる数が
1 と其の数の２個』と
定義されています。しかし、
元々は、
「掛け算で出来ない数が素数」
と考える方が自然です。

「掛け算で出来るか出来ないか」
が分類の元でしょう。

正比例の話としては
ちょっと脱線気味です。元へ。

G-c　比例・反比例

正比例の感覚、すなわち、

伴(ともな)って変わる ２つの量があって、 **一方**の値が、 ２倍、３倍、……………となると、 **もう一方**の値も、 ２倍、３倍、……………となる時、 ２つの量は比例する と言う

は、個数を数える時に既に出来ている、
と考えることが大切であり、
その感覚を創るためには、
同じ形・同じ大きさ・等質の物
を数えることが必須です。

異なる形・異なる大きさの物
を数えていては、
等倍概念はできません。

〇×△を一二三と数えていては、
等倍感覚はできないので、
幼児に個数を数えさせるときは、
同じ形・同じ大きさ・等質の物
を用意することが必要です。

幼児期に等倍概念ができれば、
６年生の正比例は、
ほとんど、用語だけの問題です。
２年生のかけ算、３年生のわり算も、
個数が、倍数であることを知らなければ、
それはそれは難問になります。

正比例の学習で、

君たちが知らないのは

正比例

という用語だけです。

少し付け加えると、
正比例を考える時、
正比例だけを考えていても、
正比例の特徴がよく判る
というものではありません。

犬の特徴を知らせようと思えば、
少なくともネコくらいは
同時に見せるべきです。

四足(よつあし)動物を見たことのない幼児に、

イヌだけを見せて、
イヌ・イヌと教えれば、
たぶん、
牛を見れば、『大きいイヌ』
と言うと思います。

三角形をよく知ろうと思えば、
四角形や五角形を見るべきです。
さらに、
円を見ることも大切です。

G-c　比例・反比例

「一方が増えるともう一方も増えるとき」
『正比例』と考える子も結構います。

両方が増えるだけでは
正比例とは言わないことも
同時に知らねばなりません。

一方が２倍になれば もう一方も２倍に増える時だけ 正比例と言う

のです。

「一方が２増えれば、
もう一方も２増えるような
二人の年齢の関係は
正比例とは言わない」のです。

また、
「24 円を分配するときの、
分配する人数と一人分の金額」のように、

一方が２倍になれば もう一方は２分の１になるとき ２つの量は反比例と言う

などの例についても考えておいてください。

本では、
疑問が湧いたとき、
どこにその答えがあるか探すのが
かなり大変です。

人間の先生の特長は、
生徒の様子を見ながら、
その疑問に答えることができる、
ということです。

ですから、
本で学ぶことも大切ですが、
先生に尋ねることも大切です。
先生に尋ねることのできない子は、
伸びそこなうので注意しましょう。
人間の先生は、君の力をはかりながら、
時に応じて関係する事柄を
ついでに触れてくださることでしょう。

正比例

１本５円ならば、２本、３本、ｎ本では？
これを表に表すと

本数	1	2	3	…	n
求める式	５円	５円×2	５円×3		５円×ｎ
全額	５円	10円	15円		円

ｎ本のところが少し説明が必要ですが、
あとは単純な小学２年生の問題です。

この表の本数を、どんな数をいれても良い変化する数の代表としてｘ本、

その結果の全額をｙ円と表すと

本数	1	…	n	…	ｘ本
求める式	５円		５円×ｎ		５円×ｘ
全額	５円		５ｎ　円		ｙ　円

$y = 5 \times x$

となり、ｙはｘに比例します。

これを**正比例**と言います。

この様に、順に考えた結果をｘやｙで表す、と約束すると
算数は断然わかりやすくなります。

G-c　比例・反比例

ｘやｙを先に表す

ｘ本	1	2	3	…	ｘ
ｙ円	5	10	15		ｙ

のような表は、かなり判りにくいものです。

結論を先に示し、その意味を後で説明する英語的表現は
英語人なら知らず、日本語人にはいささか判りにくいところです。

知っていることを重ねて、順に階段を上る学習法が
解りやすい考え方だと思います。

この学習において、

小学２年生が「分からない」

と言うところは何でしょうか。ほとんど無いのです。
まあ、ｘやｙが「？」でしょうが、
「□や△の代わり」と言えば、当たらずとも遠からず、にいけます。

ソ−6

反比例

反比例を学ぶのに適した時期は、
小学６年生でしょうか。

例えば、反比例と呼ばれる次の問題。

24 本の鉛筆を分けます。
１人でもらえば 24 本。
２人で分ければ、１人は 12 本。
３人で分ければ、１人は８本。
４人で分ければ、１人は６本。
８人で分ければ、１人は３本。
分ける人数が２倍になれば、
１人当たり２分の１。
分ける人数が３倍になれば、
１人当たり３分の１。

このようなことを学ぶのに、
小学６年生まで待つべきでしょうか。
みなさんは、３年生の時に出来たと思うことでしょう。

24 個の同じ大きさの正方形があります。
この正方形を長方形の形に
並べます。
タテに１個ならば、ヨコは 24 個。
タテに２個ならば、ヨコは 12 個。
タテに３個ならば、ヨコは ８個。
タテに４個ならば、ヨコは ６個。
タテに６個ならば、ヨコは ４個。
……………
タテの個数が２倍になれば、
ヨコの個数は２分の１。
タテの個数が３倍になれば、
ヨコの個数は３分の１。
……………

面積が、24 ㎠の長方形があります。
タテの長さが１㎝ならば、ヨコは 24 ㎝。
タテの長さが２㎝ならば、ヨコは 12 ㎝。
タテの長さが３㎝ならば、ヨコは８㎝。
タテの長さが４㎝ならば、ヨコは６㎝。
タテの長さが６㎝ならば、ヨコは４㎝。
タテの長さ２倍になれば、
ヨコの長さは２分の１。
タテの長さが３倍になれば、
ヨコの長さは３分の１。

と、面積が入れば、
四年領域を学んでから。

24ｋ㍍を進むのに、
１時間に１ｋ㍍の速さならば、24 時間
１時間に２ｋ㍍の速さならば、12 時間
１時間に３ｋ㍍の速さならば、８時間
１時間に４ｋ㍍の速さならば、６時間
１時間に６ｋ㍍の速さならば、４時間が掛ります。
速さが２倍になれば、時間は２分の１、
速さが３倍になれば、時間は３分の１。

を考えるのは、速さを学んでから。

しかし、
簡単な数字ならば、
三年生でも十分に理解できます。
反比例の実例は、
６年生を待つ必要はありませんね。

さて、

G-c　比例・反比例

人類は、
正比例と反比例の概念の
どちらを先に獲得したのでしょうか。

わり算は、
かけ算のの逆のように考えていますから、
掛け算の後で割り算ができたように
思われがちです。

しかし、
食べ物を見つけた後、
仲間で分け合うのが先か、
食べ物を生産するとき、
仲間が増えて何倍かになるのが先か。
どうでしょう。

割り算が先のように思われませんか。

無いところに足していく足し算と、
有るところから引いていく引き算と
どちらが先に獲得した考え方でしょうか。

人類は、（猿類も）
引くことを
足すことより先に行っていたのは
確かだと思います。

まあ、そのようなわけで、
今ある数学は、
人類の初めからそうだったのでなく、
どこかで順序が変わった、
と考えるべきだ、と思うのです。

それゆえ、
きみたちも、算数を考える時、
今の数学の本の順が望ましい順序だ、
とは考えない方が良いのではないか、
と言う提案です。

ノーベル賞をもらわれた
本所丸々さんが
『ほんとかどうか、自分で見るまでは
信用するな』
と言っておられますから。

G-c　比例・反比例

反比例と逆比

一方が２倍になると、 もう一方が２分の１となるとき、 二つは反比例するという。

上のことを式に表せば、

一方が×2 となると、 もう一方が÷2 となるとき、 二つは反比例すると言う。

一方が３倍になると、 もう一方が３分の１となるとき、 二つは反比例するという。

上のことを式に表せば、

一方が×3 となると、 もう一方が÷3 となるとき、 二つは反比例すると言う。

一方がｎ倍になると、 もう一方がｎ分の１となるとき、 二つは反比例するという。

上のことを式に表せば、

一方が×ｎとなると、 もう一方が÷ｎとなるとき、 二つは反比例すると言う。

一方の量がＡで、
もう一方の量がB、とすると、
Ａが２倍になると、Ｂは２分の 1.

これはＡ×2 となると、ＢはＢ÷2
と示すことが出来ます。

（Ａ×2）×（Ｂ÷2）＝Ａ×Ｂ　です。
同じように、
（Ａ×3）×（Ｂ÷3）＝Ａ×Ｂ　です。
（Ａ×ｎ）×（Ｂ÷ｎ）＝Ａ×Ｂ　です。

反比例する二つの数の積は 元の数２つの積と同じで 常に一定です。

これを使って、少し発展させると、

一方が$\frac{2}{3}$倍、$\frac{3}{4}$倍、$\frac{p}{m}$倍…………になると、 もう一方が、 $\frac{3}{2}$倍、$\frac{4}{3}$倍、$\frac{m}{p}$倍………になる時、 二つは反比例するという。

ことがわかります。

G-c　比例・反比例

1：2は、×2 です。

2：1は、÷2 です。

1：2と2：1は、逆の関係です。

1：3は、×3 です。

3：1は、÷3 です。

1：3と3：1は、逆の関係です。

2：3は、÷2×3＝×3÷2 です。

3：2は、÷3×2 です。

逆の関係であることが判ります。

つまり、
$\boxed{2：3}$と$\boxed{3：2}$の関係、
$\boxed{3：4}$と$\boxed{4：3}$の関係、
$\boxed{m：p}$と$\boxed{p：m}$の関係は、

逆の関係です。

これを、

逆比、といいます。

反比例

ネーミングの問題ですが、
反比例と言う用語の響きは、
余り良くありません。

負の数も問題です。
正の数・正比例にくらべて、
良くないイメージがあるからです。

他にこれが良い、
と言う案も無いのですが、
みなさんには、
良くないイメージを持つ必要は無い、
と強調しておきたいのです。

タテが２倍になって、
ヨコが２分の１になるのは、
別に、
２倍になった方が正常で
２分の１になった方が卑下する必要は
ありません。

価値観を秘めている用語は、
数学には向きません。